NEKE NUMERIČKE KARAKTERISTIKE 4-POLITOPA

VLADIMIR TELEBAK
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Banjoj Luci
Ul. Mladena Stojanovića 2
Banja Luka, Republika Srpska
e-pošta: vladotelebak@yahoo.com

Sažetak

Prema Štajnicovom radu iz 1906. godine skup $f-$vektora $3-$politopa dat je sa:

$$\mathcal{F}_3 = \{(f_0, f_1, f_2) \in \mathbb{Z}^3 : f_0 \leqslant 2f_2 - 4, f_2 \leqslant 2f_0 - 4, f_0 - f_1 + f_2 = 2\}$$

Dakle, okarakterisan je sa dvije linearne nejednakosti i sa jednom linearnom jednakošću, poznatom kao Ojler-Poenkareova formula.

Problem karakterizacije $f-$vektora u opštem slučaju nije ni izbliza tako jednostavan. Do danas smo uspjeli da ga riješimo samo u nekim specijalnim slučajevima. Ako izuzmemo trivijalan dvodimenzionalan slučaj, jedino (ali u svakom slučaju ne malo) sto imamo pored Štajnicove teoreme je $g-$Teorema koja u potpunosti rješava pitanje $f-$vektora simplicijalnih, a zbog dualnosti i prostih politopa. Ovu teoremu kao konjekturu postavio je 1971. godine MekMalen. Dokazana je 9 godina

kasnije, Bilera i Li su dokazali potrebnost, a Stenli dovoljnost uslova.

U procesu karakterizacije $f-$vektora neke klase politopa bitno je da odredimo linearne jednakosti i nejednakosti koje bi vrijedile za te $f-$vektore. Što se tiče linearnih jednakosti, poznato je da je jedina koja važi za f-vektor proizvoljnog konveksnog politopa već pominjana Ojler-Poenkareova formula. Kada posmatramo samo $f-$vektore $4-$politopa, što će nas uglavnom i interesovati u nastavku, poznate su nekolike nejednakosti, objavljene u radu M. M. Bajer iz 1987. godine.

Nov pristup problemu pojavljuje se u radu G. M. Ciglera iz 2002. godine, u kom on uvodi homogene koordinate, ovdje, iz praktičnih razloga, drugačije zapisane:

$$\varphi_1 = \frac{f_1 - 10}{f_0 + f_3 - 10} \qquad \varphi_2 = \frac{f_2 - 10}{f_0 + f_3 - 10}$$

Gore pominjane linearne nejednakosti lako mogu da se prevedu na jezik homogenih koordinata. Definišemo li debljinu politopa sa:

$$F(P) = \varphi_1 + \varphi_2$$

pokazuje se da je problem karakterizacije $f-$vektora ekvivalentan pitanju da li se debljina politopa može ograničiti nekom konstantom.

Međutim, i tu su se odmah u startu pojavile određene teškoće. Što se tiče ograničavanja debljine politopa nema nikakvih naznaka, bar za sada, da će nam to poći za rukom. S druge strane, ispostavilo se da svi do sada poznati politopi imaju uglavnom malu debljinu, manju od tri.

To je zahtjevalo nove konstrukcije. Dosta korisnim u tom pogledu pokazali su se deformisani proizvodi i projekcije politopa, pa je poslednjih godina to i bila zajednička osnova za rezultate u ovoj oblasti.

Najdeblji danas poznati politop P ima debljinu $F(P) = 9$ i konstruisan je u Ciglerovom radu iz 2004. godine, a upravo ta konstrukcija će biti centralni rezultat i ovoga rada.

1 Politopi, definicije i primjeri

Na početku ćemo navesti samo osnovne pojmove vezane za konveksne politope, koji će nam biti potrebni u nastavku, preskačući dokaze, posebno onih tvrdnji koje nisu na glavnoj liniji rada.

1.1 Dvije definicije konveksnog politopa

Definicija 1. Neka je $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{R}^d$. Konveksan omotač

$$P = conv\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} = \bigcap \{C \in \mathbb{R}^d : C \text{ je konveksan}, \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subseteq C\}$$

nazivamo *$\mathcal{V}-$politopom.*

Definicija 2. Neka su $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\} \subseteq \mathbb{R}^d, \{b_1, ..., b_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Tada skup

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leqslant b_i, \forall i = 1, ..., n\} = \{A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b} : A \in \mathbb{R}^{n \times d}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n\}$$

nazivamo *$\mathcal{H}-$poliedrom.*

Definicija 3. Ograničen $\mathcal{H}$-poliedar nazivamo *$\mathcal{H}-$politopom.*

Teorema 1. *(Vejl-Minkovski) Skup $P \in \mathbb{R}^d$ je $\mathcal{H}-$politop ako i samo ako je $\mathcal{V}-$politop.*

U nastavku ćemo, u skladu sa teoremom 1, koristiti paralelno obje definicije, zavisno od potreba.

Primjetimo da smo mi u suštini definisali konveksne politope. Svakako da postoje i nekonveksni, ali nam oni nisu od interesa, tako da ćemo uvijek kada kažemo politop smatrati da je konveksan.

Definicija 4. *Dimenzija politopa* je dimenzija najmanjeg, u smislu dimenzije, afinog prostora koji ga sadrži.

1.2 Strane politopa

Definicija 5. Ako za sve $\mathbf{x} \in P$, i za neke $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}$, gdje je P politop u $\mathbb{R}^d$, važi

$$\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leqslant b$$

tada tu nejednakost nazivamo *validnom za politop* P.

Definicija 6. Ako je $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leqslant b$ neka, za politop P, validna nejednakost, tada skup tačaka F politopa P koji tu nejednakost dostižu nazivamo *stranom* politopa P, a pomenutu nejednakost nazivamo *definišućom* za stranu F. Takođe ćemo i za hiperravan određenu tom nejednakošću reći da je *definišuća* za stranu F. Strane politopa su i same politopi, što se lako vidi iz $\mathcal{F}-$definicije.
Ako je P neki $d-$dimenzionalan politop, njegove strane dimenzije $0, 1,$ odnosno $d-1$ nazivamo *tjemenima, ivicama,* odnosno *facetima.* Sve strane osim praznog skupa i samog politopa (koji su uvijek strane) nazivaćemo *pravim stranama.*

Primjedba 2. Iz definicije vidimo da je strana politopa skup tačaka toga politopa na kome se maksimizuje (minimizuje) neka linearna funkcija.

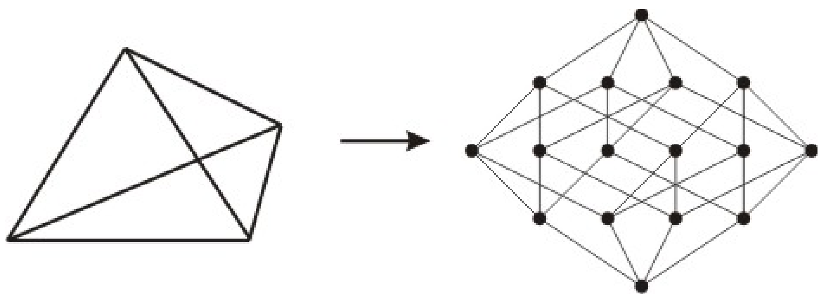
Definicija 7. Skup svih strana politopa P, $L(P)$, uređen inkluzijom nazivamo *mrežom strana* politopa P.

Primjedba 3. Lako se vidi da je mreža strana $L(P)$ politopa P stvarno mreža, tj. $L(P)$ je parcijalno uređen skup (*poset*) i za svaka dva elementa iz $L(P)$ postoji, i jedinstven je, infimum i supremum.

Ako su F i G strane politopa P tada vrijedi:

$$inf(F, G) = F \cap G,$$

$$sup(F, G) = conv(F \cup G).$$



Slika 1: Tetraedar i njegova mreža strana, Bulova mreža B_4

Definicija 8. Neka je $(L, \leqslant)$ neki konačan, parcijalno uređen skup. *Dual* od L, u oznaci L^{op}, je parcijalno uređen skup sa istim elementima, ali relacijom poretka suprotnom onoj u L, Tj. $x \leqslant y$ u L ako i samo ako je $y \leqslant x$ u L^{op}

Neka je P neki politop i $L(P)$ njegova mreža strana. Tada je i $L(P)^{op}$ mreža strana nekog politopa. Taj politop, u oznaci P^* nazivamo *dualnim politopom* politopa P. Ako je P politop zadat u $\mathbb{R}^d$, tako da je $\mathbf{0} \in int(P)$, dual možemo zadati sa

$$P^* = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leqslant 1, \text{ za sve } \mathbf{x} \in P\}.$$

Definicija 9. Dva politopa P i Q su *kombinatorno ekvivalentni*, u oznaci $P \cong Q$, ako su im mreže strana izomorfne kao poseti (postoji bijekcija $\phi : L(P) \to L(Q)$ koja se slaže sa relacijom poretka).

Definicija 10. Neka je P neki $d-$dimenzionalan politop. Niz brojeva

$$f(P) = (f_0, ..., f_{d-1}) \in \mathbb{Z}^d,$$

gdje $f_i, i = 0, ..., d-1$ predstavlja broj $i-$strana politopa P nazivamo *f-vektor* politopa P.

Uobičajeno je koristiti i $f_{-1} = 1$, što odgovara praznom skupu, odnosno $f_d = 1$ za sam politop P.

1.3 Primjeri politopa i neke konstrukcije

Definicija 11. Neka je $P \subseteq \mathbb{R}^d$ $d-$dimenzionalan politop. Politop P nazivamo *prostim* ako svako tjeme leži na tačno d ivica.

Definicija 12. Politop P, dimenzije d, nazivamo *simpleksom* ako ima $d+1$ tjeme, i ako je skup tjemena $\{v_1, \ldots, v_{d+1}\}$ afino nezavisan. Politop nazivamo *simplicijalnim* ako su sve njegove prave strane simpleksi.

Bitna osobina prostih politopa je da se njihov kombinatorni tip ne promijeni ako malo perturbujemo definišuće hiperavni. Ekvivalentno, ako je prost politop zadat sistemom nejednakosti $A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$ možemo malo promijeniti elemente od A i $\mathbf{b}$, a da ne promijenimo kombinatorni tip. Za simplicijalne politope vrijedi dualno tvrđenje, ako malo pomjeramo tjemena, ne mijenja sa kombinatorni tip.

Primjer 4. ($d-$simpleks $\triangle_d$)
Neka je $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_d\} \in \mathbb{R}^d$ standardna baza od $\mathbb{R}^d$. Definišimo

$$\triangle_d = conv\{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_d\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : x_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{d} x_i \leqslant 1\},$$

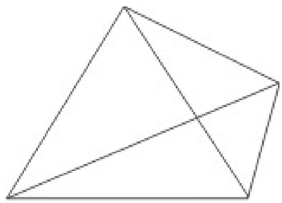
ili

$$\triangle_{d-1} = conv\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_d\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : x_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{d} x_i = 1\}.$$

Treba napomenuti da su ovo samo specifične reprezentacije već definisanog simpleksa. Simpleks je i simplicijalan i prost, i osim u dimenziji 2, gdje su svi takvi, jedini sa obje ove osobine. Takođe se lako računa $f-$vektor simpleksa:

$$f(\triangle_d) = (\binom{d+1}{1}, \binom{d+1}{2}, ..., \binom{d+1}{d}),$$

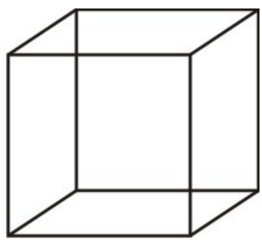
a njegova mreža strana je izomorfna Bulovoj mreži.



Slika 2: 3−simpleks

Primjer 5. ($d-$dimenzionalna hiperkocka $\square_d$)

$$\square_d = conv\{0,1\}^d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$$



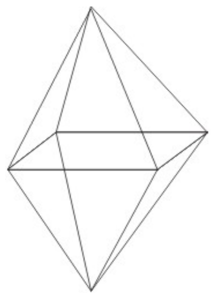
Slika 3: Hiperkocka $\square_3$

Iz $\mathcal{V}-$definicije politopa vidimo da ima 2^d tjemena, a iz $\mathcal{H}-$definicije da ima $2d$ faceta, a što se tiče ostalih elemenata $f-$vektora ovog prostog politopa vrijedi

$$f_i(\square_d) = \binom{d}{i} 2^{d-1}.$$

Primjer 6. ($d-$dimenzionalni hiperoktaedar $\lozenge_d$)

$$\lozenge_d = conv\{\pm \mathbf{e}_i : i = 1, ..., d\} = \{x \in \mathbb{R}^d : \sum_{1=1}^{d} |x_i| \leqslant 1\}$$



Slika 4: Hiperoktaedar $\lozenge_3$

Ovaj politop je simplicijalan i dualan je hiperkocki. Na osnovu toga mu računamo $f-$vektor, jer su $i-$strane jednog u bijekciji sa $(d-i)-$stranama drugog.

Postoji još jedan način da opišemo strane hiperoktaedra $\lozenge_d$. Označimo tjemena od $\lozenge_d$ elementima skupa $\{\pm 1, \ldots, \pm d\}$, tako što ćemo tjeme $\mathbf{e}_i$ označiti sa i, a njemu suprotno, $-\mathbf{e}_i$, sa $-i$. Tada je $F \subset \{\pm 1, \ldots, \pm d\}$ skup tjemena neke strane politopa $\lozenge_d$ ako i samo ako ne sadrži nijedan podskup oblika $\{\pm i\}$, za $i = 1, \ldots, d$.

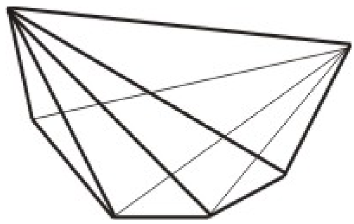
Primjer 7. ($d-$dimenzionalni ciklički politop na n tjemena $C_d(n)$)

$C_d(n)$ je kombinatorni tip politopa koji ćemo definisati kao konveksan zatvarač n tačaka na nekoj krivoj stepena d u $\mathbb{R}^d$. Za ovu svrhu nam može poslužiti *moment-kriva*:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

Sada i formalno definišimo:

$$C_d(n) = conv\{(t, t^2, ..., t^d) : t = 1, ..., n\}$$



Slika 5: Ciklicki politop $C_3(6)$

$C_d(n)$ je simplicijalan $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$-susjedski politop,to jeste, svakih $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ ili manje tjemena čini stranu. U dimenziji tri nam ova činjenica ne govori puno, ali već u dimenziji četiri to znači da svaka dva tjemena formiraju ivicu. Koristeći tu činjenicu imamo da je:

$$f(C_4(n)) = (n, \binom{n}{2}, n(n-3), \frac{n(n-3)}{2})$$

Inače postoji vrlo lijep kriterijum, poznat kao Gejlov kriterijum parnosti, da se odredi koji sve podskupovi skupa tjemena cikličkog politopa čine stranu.

Primjer 8. ($d-$dimenzionalni stek-politop $St_d(d+1+n)$)

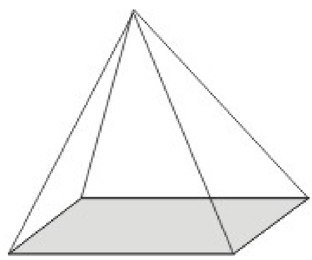
Postupak dobijanja ovog politopa opisaćemo neformalno. Uzmemo simpleks, a zatim na jedan njegov facet nalijepimo sljedeći simpleks, ali tako da novoformirani politop ostane konveksan. Tako smo dobili $St_d(d+1+1)$. Sada nastavljamo induktivno. Jasno je da smo ovim postupkom dobili jedan simplicijalan politop sa $d+1+n$ tjemena i $d+1+n(d-1)$ faceta.

Korisne u radu sa politopima mogu da budu i sljedeće konstrukcije. Neka je P neki $d-$politop. Smjestimo P u $\mathbb{R}^n$, za neko n veće od d. Izaberimo tačku x_0, izvan afinog omotača od P. Tada $(d+1)-$politop

$$Pyr(P) = conv(P \cup \{x_0\})$$

nazivamo *piramidom* nad P. Kombinatorni tip piramide ne zavisi od izbora tačke x_0. Strane od $Pyr(P)$ su strane od P i piramide nad stranama od P. Ako je $f(P) = (f_0, \dots, f_{d-1})$ $f-$vektor od P, onda je $f-$vektor od $Pyr(P)$ dat sa

$$f(Pyr(P)) = (f_0 + 1, f_1 + f_0, f_2 + f_1, \dots, f_{d-1} + f_{d-2}, 1 + f_{d-1}).$$



Slika 6: Egipatska piramida $Pyr(\Box_2)$

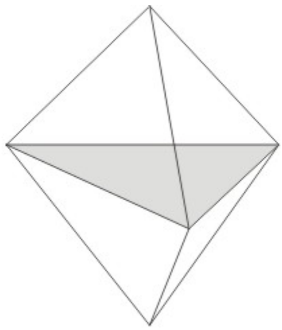
Primjeri piramida su simpleksi, $\triangle_d$ je piramida nad $\triangle_{d-1}$, i *egipatska piramida*, kao piramida nad četverouglom.
Izaberimo sada dvije tacke, x^+ i x^-, van afinog omotača od P, tako da je neka unutrašnja tacka segmenta $[x^+, x^-]$ ujedno i unutrašnja tačka politopa P. Konveksan omotač

$$Bipyr(P) = conv(P \cup \{x^+, x^-\})$$

nazivamo *bipiramidom* nad P. Bipiramida je takođe $(d+1)-$politop i vrijedi

$$f(Bipyr(P)) = (f_0 + 2, f_1 + 2f_0, f_2 + 2f_1, \dots, f_{d-1} + 2f_{d-2}, 2f_{d-1}).$$

Primjeri bipiramida su hiperoktaedri, $\Diamond_d$ je bipiramida nad $\Diamond_{d-1}$.



Slika 7: Bipiramida $Bipyr(\triangle_2)$

Definicija 13. Neka su dati politopi $P \in \mathbb{R}^p$ i $Q \in \mathbb{R}^q$. Definišimo *proizvod politopa* P i Q kao

$$P \times Q = \{\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} : \mathbf{x} \in P, \mathbf{y} \in Q\}.$$

Ako je politop P zadat sistemom nejednakosti $A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$, a Q sa $C\mathbf{y} \leqslant \mathbf{d}$ tada je proizvod $P \times Q$ dat sa

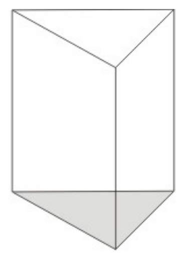
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Proizvod $P \times Q$ je politop dimenzije $dim(P) + dim(Q)$, čije su neprazne strane proizvodi nepraznih strana politopa P i Q.

Prizma nad $d-$politopom P, $Prism(P)$, je proizvod politopa P i segmenta:

$$Prism(P) = P \times \triangle_1.$$

Najmanja interesantna prizma je prizma nad trouglom, $Prism(\triangle_2)$. Hiperkocke su prizme; vrijedi $\square_{d+1} = Prism(\square_d)$.



Slika 8: $Prism(\triangle_2)$

Primjedba 9. Konstrukcije prizme i bipiramide su dualne jedna drugoj. Vrijedi

$$(Prism(P))^* = Bipyr(P^*).$$

Definicija 14. Neka je P politop, F strana od P. *Stelarna podpodjela* politopa P po strani F, $St(P, F)$ je politop koji se dobije kada u P na stranu F zalijepimo $Pyr(F)$.

Primjer 10. Neka je $1 \leqslant k \leqslant \frac{d}{2}$. Sa T_k^d obilježimo stelarnu podpodjelu politopa $\triangle_d$ po nekoj $k-$strani.
Za $0 \leqslant r \leqslant d-2$ i $1 \leqslant k \leqslant \frac{d-r}{2}$, definišemo $T_k^{d,r} = Pyr^r(T_k^{d-r})$.

1.4 Važne teoreme

Sada ćemo navesti neke od najvažnijih teorema koje se tiču politopa.

Teorema 11. *(Ojler-Poenkareova formula) Neka je P neki $d-$dimenzionalan politop i $f(P) = (f_0, ..., f_{d-1})$ njegov f-vektor. Vrijedi:*

$$f_0 - f_1 + ... + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 - (-1)^d$$

Definicija 15. Neka je P politop. Graf G čiji su čvorovi tjemena politopa P, a grane ivice, nazivamo *grafom politopa P*.

Teorema 12. *(Štajnic) Graf G je graf $3-$dimenzionalnog politopa ako i samo ako je prost, planaran i $3-$povezan.*

Teorema 13. *(Balinski) Graf $d-$politopa je $d-$povezan.*

Teorema 14. *(Blajnd i Mani) Ako dva prosta politopa imaju izomorfne grafove onda su oni kombinatorno ekvivalentni.*

Teorema 15. *(Gornja granica)(MekMalen) Ako je P neki $d-$politop sa n tjemena tada je $f_i(P) \leqslant f_i(C_d(n))$.*

Teorema 16. *(Donja granica)(Barnet) Ako je P simplicijalan $d-$politop sa n tjemena tada je $f_i(P) \geqslant f_i(St_d(n))$.*

Definicija 16. Neka je P simplicijalan $d-$politop. Vektor

$$h(P) = (h_0, \dots, h_d) \in \mathbb{N}^{d+1},$$

dat sa

$$h_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{d-i}{d-k} f_{i-1}$$

nazivamo $h-$*vektor* politopa P.

Teorema 17. *(Den-Somervilove jednakosti) Za $h-$vektor simplicijalnog $d-$politopa vrijedi*

$$h_k = h_{d-k} \qquad \text{za } k = 0, 1, \dots, d.$$

Teorema 18. *($g-$Teorema)(Bilera i Li, Stenli) Vektor $(h_0, \dots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ je $h-$vektor $d-$politopa ako i samo ako*

$$h_i = h_{d-i} \text{ za sve } i,$$

$$h_0 = 1$$

i postoji graduisana algebra za koju je

$$H = (h_0, h_1 - h_0, \dots, h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} - h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1})$$

Hilbertova funkcija.

2 Štajnicova teorema za $f-$vektore $3-$politopa

Kao što je pomenuto u predgovoru, kompletnu karakterizaciju $f-$vektora $3-$politopa dao je Štajnic još 1906. godine. Ali prije nego što prikažemo taj rezultat dokazaćemo da je Ojler-Poenkareovu formula jedina koja vrijedi za $f-$vektor proizvoljnog politopa.

2.1 Ojler-Poenkareova formula

Ojler-Poenkareovu formulu

$$f_0 - f_1 + ... + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 - (-1)^d$$

možemo zapisati na još dva nacina:

$$\hat{\chi} := \sum_{j=-1}^{d-1} (-1)^{d-j-1} f_j(P) = 1,$$

odnosno

$$\sum_{j=-1}^{d} (-1)^j f_j(P) = 0$$

Neka je P neki $d - politop$. Odaberimo vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ tako da je $\mathbf{c}^T \mathbf{v}$ različito za svako tjeme $\mathbf{v}$ od P. Uredimo tjemena od P u rastući, po vrijednostima $\mathbf{c}^T \mathbf{v}_i$, niz $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Definišimo, za $k = 1, \ldots, n$:

$$S_k(P) = \{F \ strana \ od \ P : \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leqslant \mathbf{c}^T \mathbf{v}_k, \text{ za sve } \mathbf{x} \in F\}.$$

Vidimo da je $S_n(P)$ skup svih strana politopa P. Dvostrukom indukcijom, po d i po n dokazaćemo da je:

$$\hat{\chi}(S_k(P)) = \begin{cases} 0, & k = 1, \ldots, n-1; \\ 1, & k = n. \end{cases}$$

Jasno je da vrijedi za $d = 0$, odnosno $d = 1$. Fiksirajmo sada $d \geqslant 2$. Kada je $k = 1$, $S_1(P)$ se sastoji od praznog skupa i tjemena $\mathbf{v}_1$, pa je $\hat{\chi}(S_1(P)) = 0$. Neka je $k \geqslant 2$. Tada je

$$\hat{\chi}(S_k(P)) = \hat{\chi}(S_{k-1}(P)) + \hat{\chi}(S_k(P) \setminus S_{k-1}(P)) = \hat{\chi}(S_k(P) \setminus S_{k-1}(P)).$$

Izaberimo hiperravan H tako da su $\mathbf{v}_k$ i skup $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \setminus \mathbf{v}_k$ sa različitih strana od H. Neka je $Q = P \cap H$. (Q zovemo *tjemena figura* od P u $\mathbf{v}_k$.). Neka je $m = f_0(Q)$. Q je $(d-1)-$politop i postoji bijekcija između $j - strana$ F od P, koje sadrže $\mathbf{v}_k$ i $(j-1)-$strana $F \cap H$ od Q. Štaviše, strane iz $S_k(P) \setminus S_{k-1}(P)$ odgovaraju stranama iz skupa $S_l(Q)$, koji je definisan pomoću istog vektora $\mathbf{c}$, za neko $l \leqslant m$, uz $l < m$ ako i samo ako je $k < n$. Odatle je:

$$\begin{aligned}
\hat{\chi}(S_k(P) \setminus S_{k-1}(P)) &= \sum_{j=-1}^{d-1} (-1)^{d-j-1} f_j(S_k(P) \setminus S_{k-1}(P)) \\
&= \sum_{j=0}^{d-1} (-1)^{d-j-1} f_j(S_k(P) \setminus S_{k-1}(P)) \\
&= \sum_{j=0}^{d-1} (-1)^{d-j-1} f_{j-1}(S_l(Q)) \\
&= \sum_{j=0}^{d-2} (-1)^{d-j-2} f_j(S_l(Q)) \\
&= \hat{\chi}(S_l(Q)) \\
&= \begin{cases} 0, & l < m; \\ 1, & l = m. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}$$

Dokazali smo dakle valjanost Ojler-Poenkareove formule, a sada dokazimo još, indukcijom po d, da je Ojler-Poenkareova formula jedina

koja vrijedi za $f-$vektor proizvoljnog politopa.
Za $d=1$ vrijedi uvijek da je $f_0=2$, pa tu nemamo šta dokazivati. Neka je $d\geqslant 2$ i pretpostavimo da $\sum_{i=0}^{d-1}a_if_i=b$ vrijedi za sve $f\in\mathcal{F}_d$ pri čemu nisu svi a_i jednaki nuli. Neka je P proizvoljan $(d-1)-$politop i neka je $f(P)=(\hat{f}_0,\dots,\hat{f}_{d-2})$. Neka su P_1 i P_2 piramida, odnosno bipiramida nad P. Znamo da je:

$$f(P_1)=(\hat{f}_0+1,\hat{f}_1+\hat{f}_0,\dots,\hat{f}_{d-2}+\hat{f}_{d-3},1+\hat{f}_{d-2}),$$

$$f(P_2)=(\hat{f}_0+2,\hat{f}_1+2\hat{f}_0,\dots,\hat{f}_{d-2}+2\hat{f}_{d-3},2\hat{f}_{d-2}).$$

Kako su i P_1 i P_2 $d-$politopi to vrijedi:

$$\sum_{i=0}^{d-1}a_if_i(P_j)=b,\ \ j=1,2.$$

Oduzimajući prvu jednakost od druge dobijamo da

$$a_0+a_1f_0+\cdots+a_{d-2}f_{d-3}+a_{d-1}(f_{d-2}-1)=0,$$

odnosno

$$a_1f_0+\cdots+a_{d-2}f_{d-3}+a_{d-1}f_{d-2}=a_{d-1}-a_0,$$

vrijedi za sve $(d-1)-$politope. Vidimo i da ovo nije trivijalna relacija, pa po induktivnoj predpostavci imamo da je ona nenula umnožak od Ojler-Poenkareove formule. Odavde je $a_1\neq 0$, $a_j=(-1)^{j-1}a_1$, $j=1,\dots,d-1$ i $a_{d-1}-a_0=(1-(-1)^{d-1})a_1$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned} a_0 &= a_{d-1}-(1-(-1)^{d-1})a_1 \\ &= (-1)^{d-2}a_1-a_1+(-1)^{d-1}a_1 \\ &= -a_1 \end{aligned} \tag{2}$$

Dalje imamo da je $a_j=(-1)^ja_0$, $j=0,\dots,d-1$, što povlači i $b=(1-(-1)^d)a_0$. To konačno znači da je jednakost $\sum_{i=0}^{d-1}a_if_i=b$ ništa drugo do nenula umnožak Ojler-Poenkareove formule.

2.2 Štajnicova teorema

Teorema 19. *(Štajnic 1906.) Skup svih $f-$vektora $3-$politopa dat je sa:*

$$\mathcal{F}_3 = \{(f_0, f_1, f_2) \in \mathbb{Z}^3 : f_0 \geqslant 4, f_2 \geqslant 4, f_0 \leqslant 2f_2 - 4, f_2 \leqslant 2f_0 - 4, f_0 - f_1 + f_2 = 2\}.$$

Dokaz. Neka je (f_0, f_1, f_2) $f-$vektor $3-$politopa P.
Nejednakost $f_0 \geqslant 4$ je trivijalna, dok je $f_2 \geqslant 4$ njoj dualna nejednakost.
Jednakost $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ je u stvari Ojler-Poenkareova formula za $d = 3$. Odatle možemo izraziti f_1 kao

$$f_1 = f_0 + f_2 - 2.$$

Dvostrukim brojanjem parova (ivica,2-strana) gdje ivica pripada odgovarajućoj 2-strani dobijamo:

$$2f_1 \leqslant 3f_2,$$

što, kada se spoji sa predhodnom jednakosću daje:

$$f_2 \leqslant 2f_0 - 4.$$

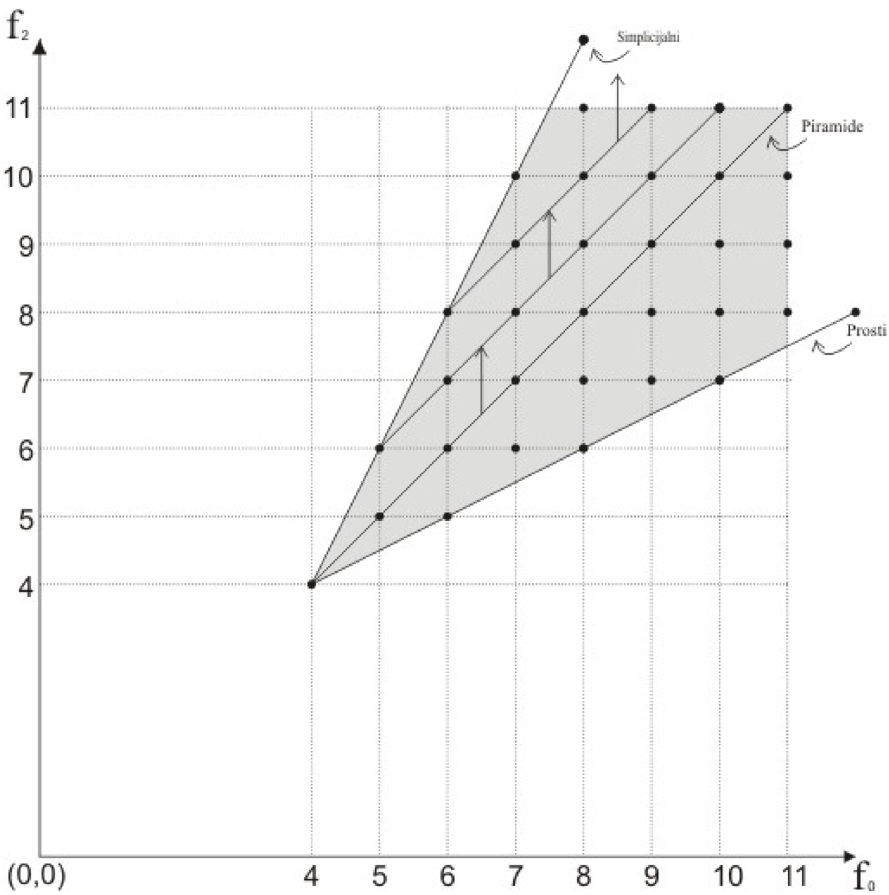
Slično, dvostrukim brojanjem parova (tjeme,ivica) gdje tjeme pripada odgovarajućoj ivici dobijamo:

$$2f_1 \leqslant 3f_0,$$

odakle imamo:

$$f_0 \leqslant 2f_2 - 4.$$

Dokažimo sada da je svaki element skupa $\mathcal{F}_3$ $f-$vektor nekog $3-$politopa. U stvari, zbog Ojler-Poenkareove formule dovoljno je posmatrati $\mathcal{C}$, projekciju skupa $\mathcal{F}_3$ na prvu i treću koordinatu.



Slika 9: Skup $f-$vektora

Za piramidu nad $n-$touglom, za svako $n \in \mathbb{N}$, vrijedi da je $(f_0, f_2) = (n, n)$.

Dalje, ako neki politop P ima stranu F koja je trougao, tada za stelarnu podpodjelu politopa P po strani F, $Q = St(P, F)$, vrijedi

$$f_0(Q) = f_0(P) + 1 \qquad f_2(Q) = f_2(P) + 2.$$

Na ovaj način, krenuvši od piramida, i popunjavajući "pravu" po "pravu" skupa $\mathcal{C}$ popunićemo "gornju polovinu" toga skupa. Za tačke iz "donje" polovine znamo da odgovaraju nekom politopu na osnovu dualnosti. $\square$

Primjetimo da jednakost $f_0 = 2f_2 - 4$ vrijedi za simplicijalne, a dualna za proste politope.

3 Linearne nejednakosti za $f-$vektore $4-$politopa

Poslije kratke ekskurzije u svijet $3-$politopa, vratimo se našoj glavnoj temi, $4-$politopima. U ovom poglavlju dokazaćemo sve poznate linearne nejednakosti koje vrijede za $f-$vektore $4-$politopa. Prije toga uvešćemo još jedan numerički objekat, $flag$ $f-$vektor.

3.1 Uopštenje $f-$vektora

Definicija 17. Neka je P neki $d-$politop i $S = \{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{0, 1, \ldots, d-1\}$ rastući niz. Označimo sa $f_S(P)$ broj lanaca

$$\emptyset \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_s \subset P,$$

gdje je $dim\ F_j = i_j$. Tada niz

$$flag - f(P) = (f_S(P))_{S \subset \{0,1,\ldots,d-1\}}$$

nazivamo *uopštenim* ili $flag$ $f-$vektorom politopa P.
Skup svih $flag$ $f-$vektora politopa dimenzije d obilježavaćemo sa $flag - \mathcal{F}_d$.

Napravimo sada mali pregled poznatih stvari o $flag$ $f-$vektorima, specijalno o $flag$ $f-$vektorima $4-$politopa.

Najpoznatiji rezultat je svakako već pominjana Ojler-Poenkareova formula. Za $4-$politope ona glasi

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0.$$

Nejednakosti iz $3-$dimenzionalnog slučaja imaju jedostavno uopštenje u više dimenzije. U $d-$politopu svaka $(d-2)-$strana je sadržana u dvije $(d-1)-$strane i svaka $(d-1)-$strana sadrži bar d $(d-2)-$strana. Odatle je $2f_{d-2} \geqslant df_{d-1}$. Iz dualnog tvrđenja za "tjeme-ivica" pripadnost imamo $2f_1 \geqslant df_0$.

Za $4-$politope imamo $f_2 \geqslant 2f_3$ i $f_1 \geqslant 2f_0$.

Grinbaum, Barnet i Rij su u potpunosti opisali projekcije $f-$vektora $4-$politopa na dvije koordinate.

Teorema o gornjoj granici kaze da je $f-$vektor $d-$politopa sa n tjemena ograničen odozgo $f-$vektorom nekog simplicijalnog $d-$politopa sa n tjemena.

Ova tvrdnja važi i za $flag$ $f-$vektore, a za $4-$politope daje nam sljedeće nejednakosti:

$$f_1 \leqslant \frac{1}{2} f_0(f_0 - 1),$$

$$f_2 \leqslant f_0(f_0 - 3),$$

$$f_3 \leqslant \frac{1}{2} f_0(f_0 - 3),$$

$$f_{02} \leqslant 3f_0(f_0 - 3).$$

$Flag$ $f-$vektori zadovoljavaju uopštene Den-Somervilove jednakosti,

$$\sum_{j=i+1}^{k-1} (-1)^{j-i-1} f_{S \cap \{j\}} = (1 - (-1)^{k-i-1}) f_S,$$

gdje je $\{i,k\} \subset S \cup \{-1,d\}$ i $\{i+1,\dots,k-1\} \cap S = \emptyset$. U slučaju $4-$politopa imamo sljedeće jednakosti: $f_{01} = 2f_1$, $f_{03} = 2f_0 - 2f_1 + f_{02}$, $f_{12} = f_{13} = f_{02}$, $f_{23} = 2f_2$, $f_{012} = f_{013} = f_{023} = f_{123} = 2f_{02}$, $f_{0123} = 4f_{02}$, pa se problem karakterizacije $flag\ f-$vektora $4-$politopa svodi na problem karakterizacije vektora oblika $(f_0(P), f_1(P), f_2(P), f_{02}(P))$, i u daljem tekstu ćemo kada kažemo $flag\ f-$vektor $4-$politopa, ukoliko to ne bude vodilo do zabune, misliti na predhodni vektor. U opštem slučaju uopštene Den-Somervilove jednakosti sjeku dimenziju skupa $flag\ f-$vektora $d-$politopa na $d-$ti Fibonačijev broj.

3.2 Linearne nejednakosti

Skup $flag - \mathcal{F}_4$ nije konveksan. Imamo, na primjer,

$$flag - f(Bipyr(\triangle_3)) = (6, 14, 16, 48),$$

$$flag - f(Prism(\triangle_3)) = (8, 16, 14, 48),$$

ali

$$\frac{1}{2} flag - f(Bipyr(\triangle_3)) + \frac{1}{2} flag - f(Prism(\triangle_3)) = (7, 15, 15, 48),$$

po projekciji na (f_0, f_2), nije $flag\ f-$vektor nekog $4-$politopa.

Označimo sa $\mathcal{C}_4$ konveksan omotač skupa vektora oblika

$$(f_0(P), f_1(P), f_2(P), f_{02}(P)),$$

gdje je P neki $4-$politop. Sljedeća teorema daje nam četiri faceta i još dvije granične hiperravni skupa $\mathcal{C}_4$.

Teorema 20. *Ako je* $(f_0, f_1, f_2, f_{02}) = (f_0(P), f_1(P), f_2(P), f_{02}(P))$ *za neki* $4-$*politop* P*, tada je*

1. $f_{02} - 3f_2 \geqslant 0$

2. $f_{02} - 3f_1 \geqslant 0$

3. $f_{02} - 3f_2 + f_1 - 4f_0 + 10 \geqslant 0$

4. $6f_1 - 6f_0 - f_{02} \geqslant 0$

5. $f_0 - 5 \geqslant 0$

6. $f_2 - f_1 + f_0 - 5 \geqslant 0.$

Za $i = 1, 2, 3, 4$, *označimo sa* A_i *hiperravan određenu* $i-$*tom nejednakošću. Tada je* $A_i \cap \mathcal{C}_4$ *facet od* $\mathcal{C}_4$.

Dokaz. 1. Prva nejednakost kaže da svaka $2-$strana ima bar 3 tjemena što je jasno za sve politope. Skup politopa

$$\{\triangle_4, Bipyr(\triangle_3), Pyr(Bipyr(\triangle_2)), T_2^4\}$$

je skup $2-$simplicijalnih politopa (politopa čije su $2-$ strane isključivo trouglovi) koji imaju afino nezavisne $flag\ f-$vektore koji leze na A_i.

2. Ova nejednakost je dual prve, po uopštenoj Den-Somervilovoj jednakosti $f_{02} = f_{13}$.

3. Dokaz ove nejednakosti jedini je netrivijalan i izlazi iz okvira ovoga rada. Dokazao ju je Kalaj, pomoću rigidnosti, a za politope sa racionalnim tjemenima postoji dokaz koji koristi tehnike algebarske geometrije. Skup $A_3 \cap \mathcal{C}_4$ je razapet sa $flag\ f-$vektorima politopa $\triangle_4$, $Bipyr(\triangle_3)$, $Prism(Bipyr(\triangle_2))$ i $Prism^2(Bipyr(\triangle_1))$, koji su afino nezavisni.

4. Za $3-$politop F vrijedi da je $2f_1(F) \geqslant 3f_0(F)$. Sumiramo li ovu nejednakost po $3-$stranama $4-$politopa, dobijamo

$$2f_{13}(P) = \sum_{\substack{F \in P \\ dim\ F=3}} 2f_1(F) \geqslant \sum_{\substack{F \in P \\ dim\ F=3}} 3f_0(F) = 3f_{03}(P)$$

Na osnovu uopštenih Den-Somervilovih jednakosti, $f_{13} = f_{02}$ i $f_{03} = f_0 - f_1 + f_{02}$, zadnja nejednakost postaje

$$2f_{02} \geqslant 6f_0 - 6f_1 + 3f_{02},$$

odnosno

$$6f_1 - 6f_0 - f_{02} \geqslant 0.$$

Jednakost vrijedi za politope ako i samo ako su im sve $3-$strane prosti politopi. Skup A_4 je razapet afino nezavisnim $flag\ f-$vektorima skupa politopa $\{\triangle_4, Bipyr(\triangle_3), Prism(\triangle_3), T_2^4\}$.

5. Ovo je očigledna nejednakost, ali ipak nije posledica ostalih. Jednakost vrijedi jedino za simpleks, $\triangle_4$.

6. Dualna nejednakost petoj.

$\square$

Pokažimo da skup $\mathcal{C}_4$ nije zatvoren. Neka je $\mathcal{D}_4$ zatvoren konveksan skup određen nejednakostima iz predhodne teoreme. Tada je zatvorenje od $\mathcal{C}_4$, $\overline{\mathcal{C}_4}$ podskup od $\mathcal{D}_4$. Skup $A = \{(5, f_1, 2f_1, 6f_1 - 30) : f_1 \geqslant 10\}$ leži na granici skupa $\mathcal{D}_4$ i sadrži samo jedan $flag\ f-$vektor, $flag\ f-$vektor simpleksa,$(5, 10, 10, 30)$. Dokažimo da skup A pripada i granici skupa $\mathcal{C}_4$. U prvom poglavlju smo se upoznali sa cikličkim politopima, $C_d(n)$, koji za $d = 4$ imaju $flag\ f-$vektor

$$(f_0, f_1, f_2, f_{02}) = (n, \binom{n}{2}, 2\binom{n}{2} - 2n, 6\binom{n}{2} - 6n).$$

Odavde, za svako $n \geqslant 6$, skup $\mathcal{C}$ sadrži vektor

$$\mathbf{v}_n = (5, 10, 10, 30) + \frac{1}{\binom{n}{2} - 10}(n-5, \binom{n}{2} - 10, 2\binom{n}{2} - 2n - 10, 6\binom{n}{2} - 6n - 30).$$

Odavde je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}_n = (5, 11, 12, 36) \in \overline{\mathcal{C}}_4.$$

Opisani postupak možemo iterativno nastaviti, prvo koristeći segment od $(5, 11, 12, 36)$ do $(n, \binom{n}{2}, 2\binom{n}{2} - 2n, 6\binom{n}{2} - 6n)$, i ponavljajući postupak. Tako dobijamo da je cio skup A u $\overline{\mathcal{C}}_4$.

Iz predhodne rasprave vidimo da skup $flag$ $f-$vektora $4-$politopa nema nimalo lijepu strukturu. Nije konveksan, a konveksan omotač mu nije zatvoren. Zbog tih razloga, umjesto skupa $flag - \mathcal{F}_d$, posmatra se konveksan zatvoren konus (sa tjemenom u $flag$ $f-$vektoru simpleksa) generisan ovim skupom.

Kada umjesto $flag$ $f-$vektora posmatramo samo $f-$vektor, kao jednostavnu posljedicu teoreme 20 imamo sljedeću teoremu, koja prikazuje sve poznate linearne nejednakosti na $f-$vektorima $4-$politopa.

Teorema 21. *Neka je P neki $4-$politop i $f(P) = (f_0, f_1, f_2, f_3)$. Tada je*

1. $2f_1 - 2f_0 - f_2 \geqslant 0$
2. $f_1 - 2f_0 \geqslant 0$
3. $-3f_2 + 7f_1 - 10f_0 + 10 \geqslant 0$
4. $f_0 - 5 \geqslant 0$
5. $f_2 - f_1 + f_0 - 5 \geqslant 0.$

4 Deformisani proizvodi i projekcije politopa

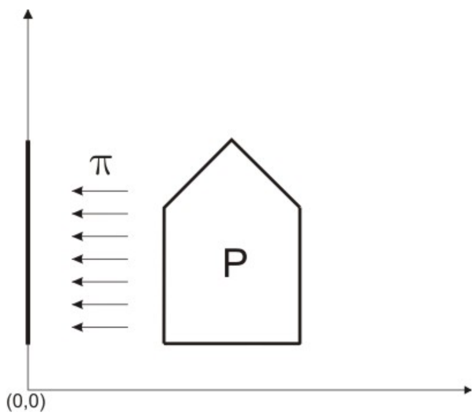
U ovom poglavlju bavićemo se *kanonskim preslikavanjima*, linearnim preslikavanjima sljedećeg oblika:

$$\pi_e : \mathbb{R}^d \ni (x_1, x_2, \dots, x_d) \mapsto (x_{d-e+1}, x_{d-e+2}, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^e.$$

Kanonska preslikavanja su specijalan slučaj takozvanih *projektivnih preslikavanja*, tj. preslikavanja $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ koja su linearna i surjektivna i gdje je $e \leqslant d$. Projektivno preslikavanje možemo predstaviti u obliku $\mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x}$, gdje je $B \in \mathbb{R}^{e \times d}$ matrica ranga e.

4.1 Projektivna preslikavanja i strane politopa

Nas posebno zanima kako projektivna preslikavanja djeluju na politope i na strane politopa. U skladu s tim počnimo sa sljedećom definicijom.



Slika 10: Projekcija petougla

Definicija 18. Neka je $P \subset \mathbb{R}^d$ $d-$politop, $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ projektivno preslikavanje i $Q = \pi(P)$ projekcija politopa P. Kažemo da je $k-$strana F, politopa P, *strogo sačuvana* pri projekciji π ako

(*i*) $G = \pi(F)$ je $k-$strana od Q kombinatorno ekvivalentna sa F,

(*ii*) $\pi^{-1}(G) = F$.

Na slici 4.1 od svih strana petougla, prilikom projekcije na drugu koordinatu strogo sačuvano je jedino gornje tjeme.

Iako je definicija poprilično jasna, ona teško da daje ideju kako da znamo koje strane od P će se strogo cačuvati prije nego što izvedemo samu projekciju.

Teorema 22. *Neka je $P \subset \mathbb{R}^d$ neki $d-$politop, $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ projektivno preslikavanje i $Q = \pi(P)$ projekcija politopa P i neka je F strana od P. Tada je $\pi(F)$ strana od Q ako F ima definišuću hiperravan $H(\mathbf{c}, c_{d+1})$ takvu da $\mathbf{c}$ pripada linealu vrsta matrice B, gdje je B matrica pridružena preslikavanju π. Sve strane od Q se dobijaju na ovaj način.*

Dokaz. Neka je $(\mathbf{c}, c_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tako da je $F = H(\mathbf{c}, c_{d+1}) \cap P$ i neka je $\mathbf{c}$ u linealu vrsta od B, to jeste neka postoji vektor $\hat{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^e$ takav da je $\mathbf{c}^T = \hat{\mathbf{c}}^T B$. Za $\mathbf{x} \in P$ neka je $\pi(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}$. Tada je

$$c_{d+1} \geqslant \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \hat{\mathbf{c}}^T B \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{c}}^T \hat{\mathbf{x}},$$

sa jednakošću ako i samo ako je $\mathbf{x} \in F$. To znači da je $\hat{\mathbf{c}}^T \hat{\mathbf{x}} \leqslant c_{d+1}$ validna nejednakost za Q i da je $\pi F = H(\hat{\mathbf{c}}, c_{d+1}) \cap Q$.

Za drugi dio tvrđenja, neka je G strana od Q takva da je $G = H(\hat{\mathbf{c}}, c_{d+1}) \cap Q$. Ako definišemo $\mathbf{c}^T = \hat{\mathbf{c}}^T B$, lako se vidi da je $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leqslant c_{d+1}$ validna nejednakost za P i da odgovarajuća hiperravan ima neprazan presjek sa P. □

Teorema 23. *Neka je $P \subset \mathbb{R}^d$ $d-$politop, $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ projektivno preslikavanje. Neka je F $k-$strana od P i $aff(F) = \mathbf{x} + L$ afin omotač od F ($\mathbf{x} \in F$ i L linearni podprostor). Tada je $\pi(F)$ kombinatorno ekvivalentno sa F ako i samo ako je $ker(\pi) \cap L = \{0\}$.*

Dokaz. F i $\pi(F)$ su kombinatorno ekvivalentni ako i samo ako je $\pi|_F$ bijekcija, a to je ispunjeno ako i samo ako je $\pi|_L$ injekcija. $\pi|_L$ je injekcija ako i samo ako je $\ker(\pi) \cap L = \{0\}$. □

Definicija/Teorema 24. Skup vektora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^d$ pozitivno razapinje $\mathbb{R}^d$ ako je ispunjen jedan od sljedećih, međusobno ekvivalentnih uslova:

(*i*) Svaki vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ je linearna kombinacija vektora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, sa nenegativnim koeficijentima.

(*ii*) Svaki vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ je linearna kombinacija vektora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, sa pozitivnim koeficijentima.

(*iii*) Vektori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ razapinju $\mathbb{R}^d$ i nul-vektor je linearna kombinacija vektora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, sa pozitivim koeficijentima (tj. vektori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ su pozitivno zavisni).

Afini omotač $k-$ strane F politopa P je oblika

$$aff(F) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'\}$$

gdje je $A' \in \mathbb{R}^{l \times d}$ matrica čije su vrste normalne na facete koji sadrže F, $l \geqslant n - k$.

Za kanonska preslikavanja, tj projekcije na poslednjih nekoliko koordinata, teoreme 22, odnosno 23 imaju posebno jednostavnu interpretaciju.

Teorema 25. *(Cigler [8]) Neka je $P \in \mathbb{R}^d$ $d-$politop i F neka $k-$strana od P. Dalje, neka je $A \in \mathbb{R}^{l \times (d-e)}$ matrica čijih su $l \geqslant d - k$ vrsta projekcije vektora normale faceta koji sadrže F na prvih $d - e$ komponenti. Tada je F strogo sačuvana, prilikom projekcije π_e, ako i samo ako vrste od A pozitivno razapinju $\mathbb{R}^{d-e}$.*

Dokaz. Kako vrste od A pozitivno razapinju $\mathbb{R}^{d-e}$, to ga one i razapinju u normalnom smislu, pa je $rang(A) = l$. Takođe, postoji $\lambda \in \mathbb{R}^l$, $\lambda > \mathbf{0}$, takav da je $\lambda^T A = \mathbf{0}^T$. Znai̇, F zadovoljava uslove predhodne dvije teoreme. Za obrat, primjetimo da A ima uvijek pun rang i da F ima normalu $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ kao u teoremi 22 ako i samo ako je $\mathbf{c} = (\mathbf{0}, \mathbf{c}'), \mathbf{c}' \in \mathbb{R}^k$ $\square$

4.2 Deformisani proizvodi

Vratimo se sada na već pominjanu priču o proizvodu politopa. U prvoj glavi smo vidjeli da se proizvod politopa P i Q, zadatih sistemima nejednakosti $A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$, odnosno $A'\mathbf{y} \leqslant \mathbf{b}'$, može zadati sa

$$\begin{pmatrix} A & \\ & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix}.$$

Ovo nas motiviše da definišemo *deformisani proizvod politopa P i Q*, zadanih kao i malo prije, sljedećim sistemom nejednakosti

$$\begin{pmatrix} A & \\ B & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ M\mathbf{b}' \end{pmatrix},$$

gdje je B proizvoljna matrica, a M neki realan broj. Jako bitna stvar je to što je moguće odabrati B i M tako da deformisani proizvod politopa bude kombinatorno ekvivalentan sa običnim.

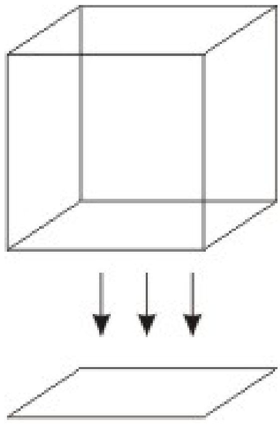
Ovakva konstrukcija nam je korisna kod projekcija proizvoda politopa, zbog kontrole očuvanja strana, kako ćemo uskoro vidjeti i na primjeru.

Primjer 26. Hiperkocku $\square_d$ najlogičnije je zadati sljedećim sistemom nejednakosti

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}.$$

Svaka vrsta gornje matrice u stvari predstavlja dvije vrste i odgovara dvjema nejednakostima, jednoj sa plusom, drugoj sa minusom, a nedostajuće vrijednosti su jednake nuli.

Međutim, projektujemo li ovako zadanu hiperkocku na zadnje dvije koordinate, nijedna strana neće biti strogo sačuvana.



Slika 11: Projekcija kocke

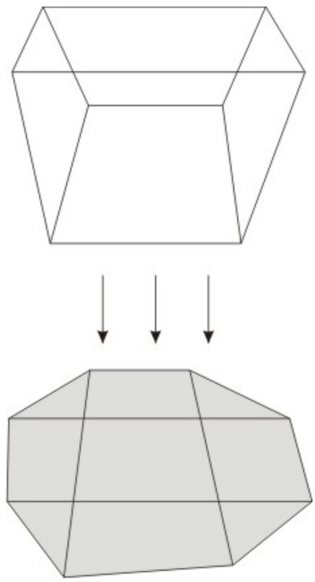
Koristeći tehniku deformisanih proizvoda definisaćemo u sljedećem primjeru hiperkocke poznate pod nazivom *Goldfarbove kocke.*

Primjer 27. (Goldfarbove kocke) Goldfarbove kocke zadajemo sljedećim sistemom nejednakosti

$$\begin{pmatrix} \pm\varepsilon & & & & & \\ 1 & \pm\varepsilon & & & & \\ & 1 & \pm\varepsilon & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & \pm\varepsilon & \\ -1 & & & -1 & & \pm\varepsilon \end{pmatrix} \mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$$

Kao i u predhodnom primjeru matrica sa lijeve strane nejednakosti, G_d^ε, pripada $\mathbb{R}^{2d\times d}$. Iz gornjih razmatranja znamo da smo dobili $d-$politop kombinatorno ekvivalentan hiperkocki.

Projektujemo li Goldfarbovu kocku u $\mathbb{R}^2$, preživjeće sva tjemena. Da ovo vrijedi, u skladu sa teoremom 25, dovoljno je prvjeriti da nakon



Slika 12: Projekcija Goldfarbove kocke

brisanja, iz matrice G^{ε}_{d}, poslednje dvije kolone, vrste nove matrice G^{ε}, koje odgovaraju nekom tjemenu pozitivno razapinju $\mathbb{R}^{d-2}$. Ovu proceduru mozemo bitno pojednostaviti. Naime, pozitivna zavisnost je stabilna u odnosu na male perturbacije vektora. U skladu s tim, problem smo sveli na to da provjerimo da li d vrsta matrice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}^T \\ E_{d-2} \\ -\mathbf{1}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times(d-2)}$$

pozitivno razapinju $\mathbb{R}^{d-2}$, a to je tačno na osnovu teoreme 24, *(iii)*.

5 Homogene koordinate i debeli politopi

Umjesto da posmatramo samo linearne kombinacije broja strana nekog politopa, u daljem ćemo se skoncentrisati na količnike istih. Definisaćemo homogene parametre kojima ćemo pokušati okarakterisati ekstremalne politope.

Primjer homogenog parametra je *srednji stepen tjemena*, $\frac{f_{01}}{f_0} = 2\frac{f_1}{f_0}$. Radi jednostavnosti, naše ćemo parametre ubuduće normalizovati, tako da za simpleks i brojilac i imenilac budu nula. Tako se svaka eventualna nejednakost oblika "naš parametar $\geqslant$ konstanta" može transformisati u linearnu nejednakost, sa jednakošću za simpleks. Upravo onakve linearne nejednakosti na kakve smo i do sada navikli. Tako bi umjesto gore definisanog srednjeg stepena tjemena, koristili, na primjer, parametar $\delta_0 = \frac{f_1-10}{f_0-5}$.

Ovakvi parametri su korisni, u prvom redu, zato što "mjere kompleksnost" politopa, nezavisno od njegove "veličine". Na primjer, poprilično su stabilni kod raznih operacija "lijepljenja" politopa i ostalih topoloških operacija.

5.1 Homogene koordinate

Sljedeća dva parametra zvaćemo *debljina* i *kompleksnost*:

$$F(P) = \frac{f_1 + f_2 - 20}{f_0 + f_3 - 10}, \qquad C(P) = \frac{f_{03} - 20}{f_0 + f_3 - 10}.$$

I debljina i kompleksnost su sami sebi duali. Politop P i njegov dual imaju jednaku, kako debljinu, tako i kompleksnost. Koristeći uopštene Den-Somervilove jednakosti i nejednakosti iz teoreme 20 dobijamo

$$C(P) \leqslant 2F(P) - 2 \qquad \text{i} \qquad F(P) \leqslant 2C(P) - 2.$$

Jednakost u prvoj nejednakosti važi ako i samo ako su svi faceti od P prosti politopi, a u drugoj ako i samo ako je P $2-$prost $2-$simplicijalan (sve 2−strane i politopa P i njegovog duala su trouglovi). Odavde se vidi da su debljina i kompleksnost asimptotski jednaki: velika debljina povlači veliku kompleksnost i obratno.

U duhu gornjih razmatrnja definišimo sljedeće parametre:

$$\varphi_1 = \frac{f_1 - 10}{f_0 + f_3 - 10} \qquad \varphi_2 = \frac{f_2 - 10}{f_0 + f_3 - 10}.$$

Vidimo da je $F(P) = \varphi_1 + \varphi_2$. Teoremu (21) sada možemo preformulisati.

Teorema 28. *(reformulacija teoreme 21; Epštajn, Kuperberg i Cigler [2]) Za sve 4−politope, i njima pridružene homogene koordinate φ_1 i φ_2 vrijede sljedeće nejednakosti:*

(i) $\varphi_1 - \varphi_2 \leqslant 1$,

(ii) $\varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 1$,

(iii) $\varphi_1 \geqslant 1$,

(iv) $\varphi_2 \geqslant 1$,

(v) $\varphi_1 + \varphi_2 \geqslant \frac{5}{2}$.

Formirati neku nejednakost sa homogenim koordinatama, a zatim je predstaviti kao linearnu nejednakost pokazalo se da je Sizifov posao. Jedino je moguć obrnut postupak.

Međutim možemo razmišljati na drugi način. Predpostaviti da više nema nejednakosti sa homogenim koordinatama. Ako bi to uspjeli dokazati, to bi isto bio uspješan završetak priče o karakterizaciji f−vektora 4−politopa.

Da to dokažemo, trebamo znati konstruisati 4−politop proizvoljno velike debljine. Ipak, i to se čini jako teškim. Sve poznate klase politopa imaju malu debljinu, uglavnom manju od četiri. Na primjer, prost ili simplicijalan politop imaju debljinu manju od 3, a pošto znamo da će slučajno generisani politop skoro sigurno da bude simplicijalan ni to nam baš ne ide u prilog.

Sve u svemu, nekih rezultata ima. Jasno je da nam trebaju nove metode konstruisanja politopa. Tu su upravo projekcije politopa i deformisani proizvodi, bar za sada, odigrali ključnu ulogu.

Poslednjih nekoliko godina, rezultati u teoriji politopa su direktno ili indirektno povezani upravo sa projekcijama i deformisanim proizvodima.

Uporedo vlada i pokušaj da se razne *ad-hoc* konstrukcije i formalizuju, što je unekoliko i urađeno. Tu se kao glavni problem isprječilo to što nemaju svi $4-$politopi reprezentaciju u $\mathbb{R}^4$ u kojoj su sve ivice tangente na jediničnu loptu.

5.2 Projektovani deformisani proizvod $n-$touglova

Trenutni rekord što se tiče debljine je politop, tačnije klasa politopa, debljine devet, konstruisana u Ciglerovom radu [8] iz 2004. godine i mi ćemo ovdje prezentovati upravo taj rezultat.

Teorema 29. *(Cigler [8]) Neka je $n \geqslant 4$ paran i $r \geqslant 2$. Tada postoji $2r-$politop $P_n^{2r} \in \mathbb{R}^{2r}$, kombinatorno ekvivalentan proizvodu r $n-$touglova, $P_n^{2r} \cong (C_n)^r$, takav da projekcija, $\pi_4 : \mathbb{R}^{2r} \to \mathbb{R}^4$, na zadnje 4 koordinate strogo sačuva $1-$skeleton (tj. strane dimenzije 0 i 1), kao i $n-$tougaone $2-$strane ($2-$strane od P_n^{2r} koje odgovaraju stranama u $(C_n)^r$ koje su rezultat proizvoda $n-$tougla i $r-1$ tjemena) od P_n^{2r}.*

Dokaz. Za $n \geqslant 4$ parno i $r \geqslant 2$, neka je P_n^{2r} definisan sljedećim sistemom nejednakosti

$$\begin{pmatrix} V^\varepsilon & & & & & & \\ W & V^\varepsilon & & & & & \\ U & W & V^\varepsilon & & & & \\ & U & W & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & V^\varepsilon & & \\ & & & U & W & V^\varepsilon & \\ & & & & U & W & V^\varepsilon \end{pmatrix} \mathbf{x} \leqslant \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \mathbf{b}_r \end{pmatrix}$$

Matrica koeficijenata na lijevoj strani, $A^\varepsilon_{n,r} \in \mathbb{R}^{rn\times 2r}$, se sastoji od blokova veličine $n \times 2$, gdje je

$$V = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \to V^\varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{v}^\varepsilon_0 \\ \mathbf{v}^\varepsilon_1 \\ \mathbf{v}^\varepsilon_2 \\ \mathbf{v}^\varepsilon_3 \\ \vdots \end{pmatrix},\ W = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{w}_1 \\ \vdots \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 2},$$

gdje je

$$\mathbf{v}_0 = (1,0),\ \mathbf{v}_1 = (0,0),\ \mathbf{w}_0 = (0,1),\ \mathbf{v}_1 = (-3,-\frac{2}{3}),$$

$$\mathbf{u}_0 = (-\frac{31}{4},\frac{1}{2}),\ \mathbf{u}_1 = (9,-\frac{2}{3}).$$

Blok V^ε se dobija od V $\varepsilon-$perturbacijom:

$$\mathbf{v}^\varepsilon_i = \begin{cases} (1-\varepsilon(n-2-2i)^2, \varepsilon(n-2-2i)), & \text{za } i = 0,2,4,\ldots,n-2; \\ \varepsilon(1-\varepsilon(n-2-2i)^2, \varepsilon(n-2-2i)), & \text{za } i = 1,3,5,\ldots,n-3; \\ \varepsilon(-1,0) = (-\varepsilon,0), & i = n-1, \end{cases}$$

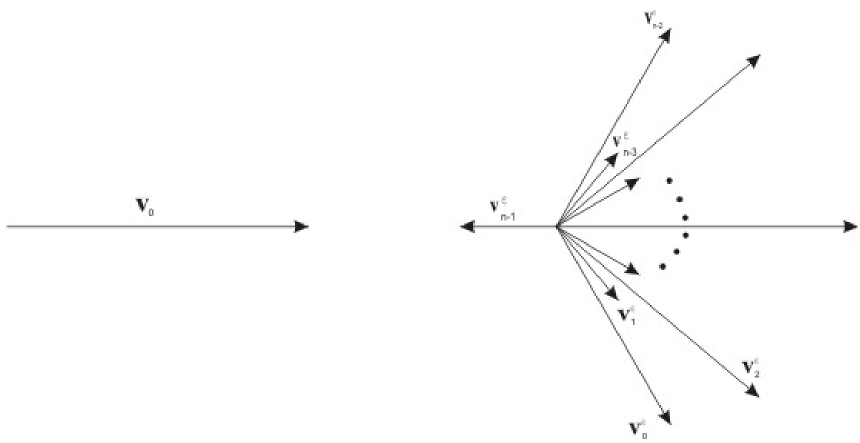
za dovoljno malo $\varepsilon > 0$. Svi ostali elementi matrice $A^\varepsilon_{n,r}$ su jednaki nuli.

Što se tiče desne strane sistema nejednakosti ona je data sa:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \\ \varepsilon \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_k = M^{k-1}\mathbf{b}_1$$

za dovoljno veliko M. Dokazaćemo da je ovako definisan politop kombinatorno ekvivalentan proizvodu r $n-$touglova i da sve njegove $n-$tougaone $2-$strane prežive projekciju na zadnje četiri koordinate. Ovo je dovoljno da dokažemo teoremu, jer sve $0-$ i $1-$strane leže na nekoj $n-$tougaonoj strani.

Vrste $\mathbf{v}_i^\varepsilon$ od V^ε su u cikličkom rasporedu:



Slika 13: Vrste od V^ε

Ako ih još i pomnozimo

$$\frac{1}{\mathbf{b}_{k,i}}\mathbf{v}_i^\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{M^{k-1}}\mathbf{v}_i^\varepsilon, & \text{za } i \text{ parno;} \\ \frac{1}{\varepsilon M^{k-1}}\mathbf{v}_i^\varepsilon, & \text{za } i \text{ neparno} \end{cases}$$

biće u konveksnom položaju, ako je ε dovoljno malo. Znači da je P_n^{2r} deformisani proizvod r $n-$touglova, ako je ε dovoljno malo, a M veliko, tj. kombinatorno je ekvivalentan sa običnim proizvodom r $n-$touglova.

Dokažimo još da sve $n-$tougaone $2-$strane prežive projekciju. Dokazaćemo da matrica sa lijeve strane nejednakosti, kada umjesto blokova V^ε stavimo blokove V, zadovoljava uslove iz teoreme 24. Ovo je dovoljno, zato što je pozitivna zavisnost stabilna u odnosu na male perturbacije vektora, što smo već i pominjali. Označimo novu matricu sa $A_{n,r}$.

Svaka $n-$tougaona $2-$strana prostog $2r-$politopa P_n^{2r} je definisana vektorima normale $2r-2$ faceta koji je sadrže. Vektori normale faceta odgovaraju vrstama matrice $A_{n,r}$, tako da za $n-$tougaonu $2-$stranu treba da uzmemo dvije ciklički susjedne vrste iz svakog bloka (odgovaraju tjemenu svakog od $n-$touglova koji učestvuju), osim iz jednog bloka, iz koga ne uzimamo niti jednu vrstu. Zahvaljujući strukturi blokova U, V i W, u kojima vrste alterniraju, nebitno je koji ćemo par susjednih izabrati, a takođe ni poredak izabrane dvije vrste nije bitan.

Da bimo završili sa dokazom treba, dakle, da dokažemo sljedeće tvrđenje:

Ako izbrišemo jednu od r vrsta redukovane matrice

$$A'_{n,r} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 & & & & & & & & & & \\ \mathbf{0} & & & & & & & & & & \\ \mathbf{u}_0 & \mathbf{v}_0 & & & & & & & & & \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{0} & & & & & & & & & \\ \mathbf{w}_0 & \mathbf{u}_0 & \mathbf{v}_0 & & & & & & & & \\ \mathbf{w}_1 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{0} & & & & & & & & \\ & & & \mathbf{w}_0 & \mathbf{u}_0 & & & & & & \\ & & & \mathbf{w}_1 & \mathbf{u}_1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \mathbf{w}_0 & \mathbf{u}_0 & \mathbf{v}_0 \\ & & & & & & & & \mathbf{w}_1 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{0} \\ & & & & & & & & & \mathbf{w}_0 & \mathbf{u}_0 \\ & & & & & & & & & \mathbf{w}_1 & \mathbf{u}_1 \\ & & & & & & & & & & \mathbf{w}_0 \\ & & & & & & & & & & \mathbf{w}_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2r\times(2r-4)}$$

preostalih $2r-2$ vrsta

(a) *razapinje $\mathbb{R}^{2r-4}$, i*

(b) *pozitivno je zavisno.*

Dokažimo prvo *(b)*. Neka je

$$\alpha_k = 2^k + 2^{-k} - 2 \quad \text{i} \quad \beta_k = 2^k + \frac{5}{4}2^{-k} - \frac{9}{4}.$$

Ovi nizovi su nenegativni, $\alpha_k, \beta_k \geqslant 0$ za sve $k \in \mathbb{Z}$, sa jednakošću jedino za $k = 0$.
Za *(b)* nam je sada dovoljno da dokažemo sljedeću tvrdnju:

Za sve $1 \leqslant t \leqslant r$, vrste od $A'_{n,r}$ su pozitivno zavisne sa koeficijentom α_{k-t} za vrstu sa parnim indeksom iz k-tog bloka, odnosno β_{k-t} za vrstu sa neparnim indeksom iz k-tog bloka.

Ovo u stvari znači da dvije vrste u $k-$tom bloku dobiju nulu za koeficijent, pa se brišu iz zavisnosti. Došli smo do uslova

$$\alpha_{k-1}\mathbf{v}_0 + \alpha_k\mathbf{w}_0 + \beta_k\mathbf{w}_1 + \alpha_{k+1}\mathbf{u}_0 + \beta_{k+1}\mathbf{u}_1 = \mathbf{0},$$

koji treba da važi za $k \leqslant |r-2|$, ali koji mi imamo za sve $k \in \mathbb{Z}$. Naš izbor vektora $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_1$, upravo je tako napravljen da ovaj uslov važi.

Za *(a)* treba da dokažemo, da ako obrišemo jedan od r parova vrsta matrice $A'_{n,r}$, rezultujuća matrica će imati i dalje pun rang $2r-4$. Ako obrišemo prvi ili drugi par ostaje nam u svakom slučaju poslednjih $2r-4$ vrsta koje koje čine gornju trougaonu blok-matricu, koja ima pun rang jer su dijagonalni blokovi

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{w}_1 \end{pmatrix}$$

regularne matrice. Ako je neki od preostalih parova obrisan, treba da provjerimo da su matrice

$$M_k = \begin{pmatrix}
\mathbf{u}_0 & \mathbf{v}_0 & & & & & \\
\mathbf{u}_1 & \mathbf{0} & & & & & \\
\mathbf{w}_0 & \mathbf{u}_0 & \mathbf{v}_0 & & & & \\
\mathbf{w}_1 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{0} & & & & \\
 & \mathbf{w}_0 & \mathbf{u}_0 & \mathbf{v}_0 & & & \\
 & \mathbf{w}_1 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{0} & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & & \ddots & \mathbf{w}_0 & \mathbf{u}_0 \\
 & & & & & & \mathbf{w}_1 & \mathbf{u}_1
\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2k\times 2k}$$

regularne. Umjesto da računamo determinantu ove matrice, poslužićemo se malim trikom.
Pomnožimo li vrste matrice M_k redom sa $\alpha_0, \beta_0, \ldots, \alpha_{k-1}, \beta_{k-1}$ a zatim i saberemo dobijamo, kao rezultat, linearnu kombinaciju tri vrste matrice

$$H_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 & & \\ & & \mathbf{w}_0 \\ & & \mathbf{w}_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2r}$$

sa koeficijentima $-\alpha_{-1}, -\alpha_k, -\beta_k$. Slično, ako prosumiramo sa koeficijentima $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k$ dobićemo linearnu kombinaciju iste tri vrste sa koeficijentima $-\alpha_0, -\alpha_{k+1}, -\beta_{k+1}$. Napokon, prosumirajmo sa $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_{k+1}, \beta_{k+1}$ i dobićemo linearnu kombinaciju sa koeficijentima $-\alpha_1, -\alpha_{k+2}, -\beta_{k+2}$. Matrica koeficijenata

$$\begin{pmatrix} -\alpha_{-1} & -\alpha_k & -\beta_k \\ -\alpha_0 & -\alpha_{k+1} & -\beta_{k+1} \\ -\alpha_1 & -\alpha_{k+2} & -\beta_{k+2} \end{pmatrix}$$

je regularna, njena determinanta je jednaka $\frac{3}{8}(2^k - 1 + 2^{-k-2})$. To znači da je lineal vrsta od H_3 podskup lineala vrsta od M_k. Kako jedinični vektori $\mathbf{e}_{2k-1}, \mathbf{e}_{2k} \in \mathbb{R}^{2k}$ pripadaju linealu vrsta od H_3 to pripadaju i linealu vrsta od M_k, odakle indukcijom dobijamo da je M_k regularna. $\square$

Proučimo sada kombinatoriku politopa $\pi_4(P_n^{2r})$, imajući na umu da je P_n^{2r} kombinatorno ekvivalentno sa $(C_n)^r$ i da su $n-$tougaone strane preživjele projekciju. Neka je $flag - f(\pi_4(P_n^{2r})) = (f_0, f_1, f_2, f_3; f_{03})$. Jasno je da je $f_0 = n^r$ i $f_1 = rn^r$. Uvedemo li oznaku $N = \frac{1}{4}n^{r-1}$ imamo da je $f_0 = 4nN$, odnosno $f_1 = 4rnN$.

Proizvod $(C_n)^r$ ima $P := rn^{r-1} = 4rN$ $n-$tougaonih strana. Posle projekcije sve ove strane su prisutne, uz neke kvadrilateralne $2-$strane.

Projektovani politop ima dvije vrste faceta; prizme, nastale kao proizvod $n-$tougla, ivice i $r-2$ tjemena, i kocke, kao proizvod tri ivice i $r-3$ tjemena. Svaka prizma je ograničena sa dva $n-$tougla i svaki $n-$tougao leži u dvije prizme, odakle imamo da je broj prizmi jednak broju $n-$tougaonih strana, P. Uz taj broj imamo još $C \geqslant 0$ kocaka.

Dvostrukim prebrojavanjem $2-$strana vidimo da je

$$6C+(n+2)P=2f_2,$$

što zajedno sa Ojler-Poenkareovom formulom daje

$$C=\frac{1}{4}(r-2)n^r=(rn-2n)N.$$

Jednostavnim brojanjem "tjeme-facet" pripadnosti dobijamo

$$f_{03}=8C+2nP=(16rn-16n)N.$$

Predhodnim razmatranjem zapravo smo dokazali narednu teoremu.

Teorema 30. *Za $f-$vektor $4-$politopa $\pi_4(P_n^{2r})$ vrijedi*

$$(f_0,f_1,f_2,f_3;f_{03})=(4n,4rn,5rn-3n+4r,rn-2n+4r;16rn-16n)\frac{1}{4}n^{r-1}.$$

Laganim računom dobijamo da $F(\pi_4(P_n^{2r}))\to 9, C(\pi_4(P_n^{2r}))\to 16$, kada $n,r\to\infty$, odakle konačno izlazi

Teorema 31. *Za svako $\varepsilon>0$ postoji $4-$politop P, takav da je*

$$C(P)>9-\varepsilon \quad i \quad F(P)>16-\varepsilon.$$

Literatura

[1] **M. M. Bayer,** *Extended f-vectors of 4-polytopes*, J. Combinatorial Theory, Ser. A, 44, 1987, 141-151.

[2] **D. Eppstein, G. Kuperberg, G. M. Ziegler,** *Fat 4-pollytopes and fatter 3-spheres*, Discrete Geometry: In honor of W. Kuperberg's 60th birthday, A. Bezdek, ed., vol. 253 of Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker Inc., New York, 2003, 239-265.

[3] **M. Joswig, G. M. Ziegler,** *Neighborly cubical polytopes*, Discrete Comput. Geometry (Grünbaum Festschrift (G. Kalai, V. Klee, eds.)), (2-3) 24 (2000), 325-344.

[4] **C. V. Lee,** *g-Theorem*, Lecture notes, 2002.

[5] **R. Sanyal,** *On the combinatorics of projected deformed products*, Diplomarbeit, Fakultät IV (Informatik) der Technischen Universität Berlin, 2005.

[6] **G. M. Ziegler,** *Face numbers of 4-polytopes and 3-spheres*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM 2002, Beijing), L. Tatsien, ed., vol III, Beijing, China, 2002, Higher Education Press, 625-634.

[7] **G. M. Ziegler,** *Lectures on polytopes*, vol. 152 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1995. Revised edition, 1998.

[8] **G. M. Ziegler,** *Projected products of polygons*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 10, 2004, 122-134.