MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354/6969**
XV(1)(2009), 17-25

AKSIOME TEORIJE SKUPOVA

Duško Bogdanić[1], Bojan Nikolić[2] i Daniel A. Romano[2]

Sažetak:
Postoji više od jedne mogućnosti aksiomatizacije teorije skupova. U ovom tekstu mi ćemo se koncentrisati na opšte prihvaćeni sistem – tzv. **ZFC** aksiomatski sistem teorije skupova. Slova Z, F i C su početna slova riječi Zermelo, Fraenkel, i Choice, gdje su prve dvije riječi imena autora ovog sistema, a poslenja je ime 9-og aksioma. Zermelo je formulisao 1908. godine sve, osim pete i osme aksiome. Ostalo su dodali Fraenkel i Skolem.

0. Osnovni pojmovi

Matematičari, u opštem slučaju, rade unutar takozvane „naivne teorije skupova“. Tako, u toj teoriji koja nije formalizovana aksiomatska teorija, tretiraju objekte „skupove“ kao platonističke apsolutne objekte. Tradicionalno, ovo je uobičajeno budući da se prirodni i realni brojevi „pojavljuju“ u toku osnovnog i srednjeg obrazovanja. „Skupovi su skupovi, i to je to.“ Nažalost, tako uvedeni skupovi vrlo brzo dovode do protivrječnosti (kontradikcija). Dobro poznati primjer je „skup svih skupova“, drugim riječima, Russell’s Paradox (takođe poznat kao Russell’s Antinomija). Dakle, moramo imati sljedeću tvrdnju:

Teorem. *Ne postoji skup koji sadrži sve skupove*.

Malo više formalizovano: Ako sa R označimo skup svih skupova koji ne sadrži samog sebe. Tada R niti je član samog sebe niti nije član samog sebe, tj. ako stavimo $R = \{x : \neg(x\in x)\}$, tada imamo $R\in R \Leftrightarrow \neg(R\in R)$, što je kontradikcija.

Ovaj primjer pokazuje da intuitivno shvatanje pojmova u teoriji skupova, u biti, dovodi do problema, posebno kada govorimo o skupovima.

Prvo ćemo uvesti naš “alfabet”:

Definicija 0.1. Alfabet Matematičke logike sa jednakošću proširujemo sa sljedećim nelogičkim simbolom: $\in$.

Intuitivna pozadina uvođenja ovog osnovnog pojama “indicije“ (ili „pripadanja“, ili „članstva“) jeste proširivanje pojmova atoma i formula:

[1] Mathematical Institute, Oxford University, UK
[2] Odsjek za matematiku i informatiku Univerziteta u Banjoj Luci

Formalizovana teorija skupova nema konstantni, a ako su x i y termi, tada je zapis $x \in y$ atom. Formule se prave na uobičajeni način kao u Matematičkoj logici. Varijable u ovoj teoriji čitaćemo „skup".

1 ZFC - aksiomatski sistem teorije skupova

Postoji devet aksioma i shema aksioma u **ZFC** – sistemu teorije skupova. Zapravo, postoji deset aksioma ako računamo 0-ti aksiom.

Axiom 0 (**Aksioma o egzistenciji bar jednog skupa**).

$$(\exists x)(x = x).$$

Riječima: Postoji bar jedan skup.

Intuitivno: Ovaj aksiom govori da naš univerzum, ili domen skupova koji posmatramo, nije prazan. Dakle, kad govorimo o univerzumu skupova imamo o čemu da razgovaramo.

Napomena: Ovaj aksiom može biti deriviran iz sistema aksioma logike. Alternativno, može se dokazati iz Aksioma 6 (Aksioma beskonačnosti). Dakle, ova formula i nije aksiom u pravom smislu riječi – nije nezavisna od ostalih formula. Svrstavamo je u spisak aksioma radi sticanja utiska da domen o kome hoćemo da govorimo u ovoj teoriji, teoriji skupova, nije prazan.

Axiom 1 (**Aksiom o ekstenzionalnosti** (ili Aksiom o jednakosti skupova)).

$$(\forall x)(\forall y)((y = x) \Leftrightarrow (\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)).$$

Riječima: Bilo koja dva skupa su *jednaka* ako i samo ako se sastoje od istih objekata.

Intuitivno: Intuicija koja prethodi ovom aksiomu povezuje nam osnovni pojam ove teorije sa svojstvima dvoparametarskog predikata jednakosti iz Matematičke logike. Napomenimo da je implikacija

$$x = y \Rightarrow (\forall z)\,(z \in x \Leftrightarrow z \in y)$$

teorem u Matematičkoj logici sa jednakosšću, tako da je stvarno važan samo drugi dio implikacije

$$(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y.$$

Naravno, gornje dvije formule su otvorene - imaju po dvije slobodne varijable, te ih, u principu, treba posmatrati kao univerzalno zatvorene formule. Pozivanjem na znanja iz Matematičke logike bez većih poteškoća može se, za proizvoljne varijable x, y i z iz našeg domena, dokazati sljedeće:

0.1 $x = x$ (Refleksivnost (Aksiom 1));

0.2. $x = y \Rightarrow y = x$ (Simetričnost); i

0.3. $(x = y \wedge y = z) \Rightarrow (x = z)$ (Tranzitivnost).

Naravno, u skladu sa našim shvatanjem logičke ekvivalencije, ovu aksiomu možemo zapisati i na sljedeći način:

$$x = y \Leftrightarrow (\forall t)((t \in x \Rightarrow t \in y) \wedge (t \in y \Rightarrow t \in x)).$$

Ovo nam omogućava da uvedemo novi pojam:

$$x \subseteq y \Leftrightarrow (\forall t)(t \in x \Rightarrow t \in y).$$

Problem egzistencije objekta '$\subseteq$', njegove osobine kao i problem egzistencije objekta x sa svojstvom $x \subseteq y$ su problemi koji će se kasnije razmatrati. Objekt '$\subseteq$' zovemo *inkluzija*. U tom skučaju, ako je $x \subseteq y$, onda za skup x kažemo da je *podskup* skupa y. Jasno je da vrijedi:

0.1 $x \subseteq x$;
1.1 $((x = a \wedge x \subseteq y \wedge y = b) \Rightarrow (a \subseteq b))$;
1.2 $((x \subseteq y \wedge y \subseteq z) \Rightarrow (x \subseteq z))$;
1.3 $x = y \Leftrightarrow (x \subseteq y \wedge y \subseteq x))$.

Axiom 2 (Ograničena shema-aksiom sadržavanja (ili shema-aksiom separacije, ili **Comprehension Axiom Schema**)). Za svaku formulu φ u jeziku $L \cup \{\in\}$, koja ne sadrži slobodnu varijablu y, univerzalno zatvorenje sljedeće formule je shema-aksiom:

$$(\exists z)(\forall x)(x \in y \Leftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x)).$$

Aksiom **2** nije samo aksiom, već shema-aksiom – model za pravljenje beskonačno mnogo aksioma – svaka za posebno izabranu formulu φ u kojoj se y ne pojavljuje kao slobodna varijabla.

Intuitivno: Ideja koja stoji ispred ove shema-aksiome je formalizacija konstrukcije skupova oblika $\{x : P(x)\}$, gdje je $P(x)$ neko svojstvo od x. Budući da možemo formalizovati pojam osobine posredstvom formula, gornja shema-aksioma ima jednostavnu formu

$$(\exists y)(\exists x)(x \in y \ \Leftrightarrow \varphi(x)).$$

Ova formula (rečenica) trebalo bi da je shema-aksiom (potpune) komprehenzacije. Ali, ako za φ uzmemo formulu $\neg(x \in x)$, dobijamo Russell'ov paradoks! Dakle, bilo bi pogrešno uzeti formulu potpune komprehenzacije kao aksiom u našem aksiomatskom sistemu teorije skupova. Prema tome, uzimamo svojstvo determinisano sa φ 'separatno' unutar unaprijed datog skupa z. Ova shema-aksiom nam obezbjeđuje egzistenciju takvog skupa y. Označavamo ga sa $\{x : x \in z \wedge \varphi(x)\}$. Njegovu jedinstvenost, za unaprijed izabranu formulu φ, obezbjeđuje Aksiom 1. Zaista: pretpostavimo da, pored skupa $\{x : x \in z \wedge \varphi(x)\}$, postoji i neki drugi skup, u oznaci w, sa osobinom $x \in w \Leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x))$. Tada je, prema Aksiomu 1,

$$(t \in \{x : x \in z \wedge \varphi(x)\} \Leftrightarrow t \in w) \Leftrightarrow (\{x : x \in z \wedge \varphi(x)\} = w).$$

Za skup $\{x : x \in z \wedge \varphi(x)\}$ kažemo da je *podskup* skupa z čiji objekti '*zadovoljavaju svojstvo* φ'.

Zahtjev da y nije slobodna varijabla u formuli φ eliminiše mogućnost samo-referentne definicije skupa. Na primjer, formula $(\exists y)(\forall x)(x \in y \Leftrightarrow x \in z \wedge \neg(x \in y))$, ne bi bila konzistentna sa egzistencijom nepraznog skupa z. Ako je z skup, tada zahvaljujući ograničenoj shema-aksiomi komprehenzacije možemo formirati skup

$$\{x : \neg(x = x)\},$$

koji nema elemenata. Prema Aksiomu 0, aksiomu o egzistenciji bar jednog skupa, postoji skup bez elemenata. Jedinstvenost ovog skupa obezbjeđuje Aksiom ekstenzionalnosti. Zaista, pretpostavimo da osim ovog skupa postoji još jedan skup, označimo ga sa v, koji nema elemenata. Budući da su sljedeće formule logički ekvivalentne

$$v = \{x : \neg(x = x)\} \Leftrightarrow$$
$$(\forall t)(\neg(t\in v) \Leftrightarrow \neg(t\in \{x : \neg(x = x)\})) \Leftrightarrow$$
$$(\forall t)(\neg(t\in v) \Leftrightarrow \neg\neg(t = t))$$

i, budući da je poslednja u nizu formula tautologija, zaključujemo da je skup bez elemenata jedinstven.

Možemo uvesti novi pojam:

Definicija 1.1 Skup bez elemenata označavamo sa $\varnothing$.

Lako se vidi da je prazan skup podskup svakog skupa, tj. vrijedi:

$$(\forall x)(\varnothing \subseteq x).$$

U stvari, u svakom skupu postoji jedinstven podskup koji nema elemenata. Budući da su svi takvi skupovi međusobno jednaki, zaključujemo da je prazan skup podskup svakog skupa.

Sem toga, na osnovu Aksioma komprehenzacije, možemo dokazati da ne postoji univerzalni skup koji sadrži sve skupove.

Teorem 1.2 $\neg(\exists z)(\forall x)(x\in z)$

Dokaz: Dokaz ćemo izvesti koristeći se kotrapozicijom: Pretpostavomo da takav skup postoji, i označimo ga sa z. Dakle, vrijedi $(\forall x)(x\in z)$. Tada, prema ograničenom aksiomu komprehenzacije, postoji podskup y skupa z čiji elementi zadovoljavaju sljedeći uslov

$$t\in y \Leftrightarrow \neg(t\in t).$$

Budući da je skup z univerzalan skup, njegov podskup y bi bio determinisan uslovom $\{x : \neg(x\in x)\}$ što je u kontradikciji sa Russell's Antinomijom. □

U daljem ćemo dati sljedeća tri aksioma za izgradnju skupova, a onda ćemo analizirati njihove posledice.

Axiom 3 (**Aksiom uparivanja** (ili Aksioma para)).

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x\in z \wedge y\in z).$$

Intuitivno: Aksiom uparivanja nam omogućava da od dva unaprijed data skupa možemo formirati skup od njih. Prema aksiomama 3, 1 i 2 ovaj skup je jedinstven. Zaista, pretpostavimo da za skupove x i y, pored skupa z, čiju egzistenciju obezbjeđuje Aksiom 3, imamo i skup, recimo w, takav da je $x\in w \wedge y\in w$. Tada, prema Aksiomu 1, imamo z = w ako i samo ako je $(\forall t)(t\in z \Leftrightarrow t\in w)$, tj. ako i samo ako je $(\forall t)((t\in z \wedge (t = x \vee t = y)) \Leftrightarrow (t\in w \wedge (t = x \vee t = y)))$. Budući da je poslednja formula tautologija, zaključujemo da je z = w.

Prethodno nam omogućava da uvedemo novi pojam: za skupove x i y, skup jedinstven z, čiju egzistenciju obezbjeđuje Aksiom 3, kažemo da je (neuređeni) *par*, i, označavamo ga sa $\{x,y\}$. Skup $\{x\} = \{x,x\}$, čiji je element samo skup x, nazivamo *singleton*.

Sljedeća definicija uvodi novi pojam:

Definition 1.3. (K. Kuratowsky) Za skupove x i y, skup $\{\{x\},\{x,y\}\}$ nazivanomo *uređeni par* skupa x i skupa y. Označavamo ga sa (x,y).

Dokažimo da vrijedi $(x,y) = (a,b)$ ako i samo ako je $x = a \wedge y = b$. Imamo:

$$
\begin{aligned}
(x,y) = (a,b) &\Leftrightarrow \{x\} = \{a\} \wedge \{x,y\} = \{a,b\} \\
&\Leftrightarrow x = a \wedge ((x = a \wedge y = b) \vee (x = b \wedge y = a)) \\
&\Leftrightarrow (x = a \wedge y = b) \vee (b = x = a = y) \\
&\Rightarrow x = a \wedge y = b.
\end{aligned}
$$

Axiom 4 (**Aksiom unije**).

$$(\forall \mathbf{F})(\exists A)(\forall Y)(\forall x)(x \in Y \wedge Y \in \mathbf{F} \Rightarrow x \in A).$$

Intuitivno: U ovom aksiomu, pod $\mathbf{F}$ podrazumjevamo familiju skupova, i pretpostavljamo da je svaki član te familije podskup skupa A. Ovaj aksiom zajedno sa aksiomom ekstenzivnosti daje najmanji i jedinstven skup sa osobionom pomenutom gore.

Ovo nam omogućava da uvedemo novi pojam:

Definicija 1.4. *Unija* familije skupova $\mathbf{F}$, u oznaci $\cup\mathbf{F}$, definisana je na sljedeći način:

$$\cup\mathbf{F} = \{x \in A : (\exists y \in \mathbf{F})(x \in y)\}$$

Definicija 1.5. Ako familija $\mathbf{F}$ nije prazna, tada uvodimo *presjek* familije $\mathbf{F}$, u oznaci $\cap\mathbf{F}$, na sljedeći način:

$$\cap\mathbf{F} = \{x : (\forall y \in \mathbf{F})(x \in y)\}$$

Ovaj skup, presjek $\cap\mathbf{F}$ familije $\mathbf{F}$ skupova, postoji prema aksiomu komprehenzacije, a njegova jedinstvenost, kako je to uobičajeno, slijedi iz aksioma ekstenzionalnosti. Ako je $\mathbf{F} = \varnothing$, tada je $\cup\mathbf{F} = \varnothing$. U ovom slučaju, presjek $\cap\mathbf{F}$ bi bio skup svih skupova kojih nema. Dakle, zahtjev nepraznosti familije $\mathbf{F}$, pri razmatranju presjeka $\cap\mathbf{F}$, je posebno važan.

Skraćenice : Radi jednostavnosti pisanja, stavljaćemo:

(1) $\cup\{A,B\} = A\cup B$;
(2) $\cap\{A,B\} = A\cap B$;
(3) $A \setminus B = \{x \in A : \neg(x \in B)\}$.

Axiom 5 (Shema-aksiom zamjene (ili, shema-aksiom popunjenosti, ili **Replacement Axiom Schema**)). Za skaku formulu ϕ na jeziku $L\cup\{\in\}$ u kojoj nema slobodnog pojavljivanja varijable y, univerzalno zatvorenje sljedeće formule je aksiom:

$$(\forall x\in A)(\exists! y)\phi(x,y) \Rightarrow (\exists Y)(\forall x\in A)(\exists! y\in Y)\phi(x,y).$$

Intuitivno: Ovaj, kao i aksiom 2 (Aksiom ograničene komprehenzacije) je shema-aksiom i, prema tome, daje beskonačno mnogo aksioma za skako pojedinačno ϕ. Intuitivno, ono što stoji prije ovog aksioma jeste obezbijeđivanje uslova da funkcija (tj. formula $\phi(x,y)$ za koju vrijedi $(\forall x\in A)(\exists! y)\phi(x,y)$) preslikava skup A u neki skup Y. Dakle, za svaku funkciju, tj. formulu $(\forall x\in A)(\exists! y)\phi(x,y)$ postoji skup

$$Y = \{y : (\exists x\in A)\phi(x,y)\}.$$

Ova aksiom-shema omogućava nam da determinišemo *direktni* (Dekartov) *proizvod* $A\times B$ skupova:

Definicija 1.6. Neka su A i B dati skupovi.
(1) Za svako posebno $y\in B$ i svako $x\in A$ postoji tačno jedno $z = (x,y)$. Ovo nam omogućava, uz Aksiom 5, da determinišemo skup

$$A\times\{y\} = \{z : (\exists x\in A)(z = (x,y))\}.$$

(2) Konačno, definišemo

$$A\times B = \cup\{A\times\{y\} : y\in B\}.$$

dakle, $A\times B = \{(a,b): a\in A \wedge b\in B\}$.
(3) Indukcijom, za skupove A_1, A_2 i A_3, definišemo

$$A_1\times A_2\times A_3 = (A_1\times A_2)\times A_3.$$

Ako su $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n$ skupovi, i ako je već definisano

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times ...\times A_{n-1}$$

tada definišemo

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times ...\times A_{n-1}\times A_n = (A_1 \times A_2 \times A_3 \times ...\times A_{n-1})\times A_n .$$

Definicija 1.7 (1) *Relacija* je skup čiji su svi elementi uređeni parovi.
(2) Za datu relaciju R, uvodimo pojmove *domena* i *ranga* relacije R:

$dom(R) = \{x : (\exists y)((x, y)\in R)\}$,
$rng(R) = \{y : (\exists x)((x, y)\in R)\}$.

(3) Za relaciju R relaciju $\{(y,x): (x,y)\in R\}$ nazivamo *inverz* relacije R i označavamo je sa R^{-1}.

Napomena 1.8 (1) Da bi dokazali egzistenciju domena i ranga relacije nije nam potreban aksiom popunjenosti. Ovi skupovi su podskupovi skupa $\cup\cup R$.
(2) Definicije domena, ranga i inverza ima smisla za svaku relaciju R. Dalje, ako je R neka relacija, tada imamo:

2.1. $R \subseteq dom R \times rng(R)$; i
2.2. $(R^{-1})^{-1} = R$.

(3) Uobičajeno je da pišemo xRy umjesto $(x,y)\in R$.

Definicija 1.9. *f* je *funkcija* ako i samo ako *f* je relacija za koju vrijedi

$$(\forall x\in dom(f))(\exists! y\in rng(f))((x,y)\in f).$$

Pišemo f: A $\rightarrow$ B kada mislimo da je f funkcija takva da je *dom*(f) = A i *rng*(f) $\subseteq$ B. Za x$\in$A, sa f(x) označavamo jedinstevno y takvo da je (x,y)$\in f$.
Ako je C $\subseteq$ A, tada sa

$$f \upharpoonright C = f \cap (C \times B)$$

označavamo *restrikciju* funkcije f na skup C. Dalje, pišemo

$$f\text{''}C = rng(f \upharpoonright C) = \{f(x) : x \in C\}.$$

Ponekad, ovo takođe označavamo sa f[C] (takođe sa $f * C$ ili sa f $\rightarrow$ (C)).
Funkciju f : A $\rightarrow$ B nazivamo *1-1 funkcija* ili *injekcijom* ako je f^{-1} funkcija. Za funkciju f kažemo da je *onto funkcija* ili da je *surjekcija* ako i samo ako je *rng*(f) = B. Za funkciju koja je istovremeno injekcija i surjekcija kažemo da je *bijekcija*.

Koristimo funkcije da bi upoređivali relacije:

Definicija 1.10. Ako su R i S relacije a A i B skupovi, tada su relativi (A,R) i (B,S) *izomorfni* (ili „*slični*") ako i samo ako postoji bijekcija f : A $\rightarrow$ B takva da je

$$(\forall x,y \in A)((x,y) \in R \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in S)).$$

U tom slučaju, za funkciju f kažemo da je *izomorfizam*. Ako postoji izomorfizam između relativa (A,R) i relativa (B,S), pišemo (A,R) $\cong$ (B,S).

Do sada prezentirane aksiome omogućavaju nam izgradnju samo konačnih skupova (ma šta pod tim podrazumjevali). Ovo znači da, recimo, ne možemo determinisati skup svih prirodnih brojeva. Sljedeći aksiom rješava ovaj problem:

Axiom 6 (**Aksiom beskonačnosti**).

$$(\exists x)(\varnothing \in x \wedge (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \cup \in x)).$$

Skraćenice:. Radi jednostavnosti pisanja, stavimo S(y) = y$\cup${y}. Za unarnu funkciju S kazaćemo da je *funkcija sledbenika* (ili *sukcesor funkcija* (iz razloga koji će kasnije biti jasni)).

Dakle, aksiom beskonačnosti možemo zapisati na sljedeći način:

$$(\exists x)(\varnothing \in x \wedge (\forall y)(y \in x \Rightarrow S(y) \in x)).$$

Skup, koji zadovoljava aksiom beskonačnosti, nazivamo *induktivni skup*. Kasnije će biti rigoroznije definisano šta znači pojam „beskonačno" te će biti dokazano da je induktivan skup obavezno beskonačan.

Axiom 7 (Aksiom partitivnog skupa, ili **Powerset Aksiom**).

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \subseteq x \Rightarrow z \in y).$$

Teorija skupova, za razliku od većine drugih dijelova matematike ima korijene u radovima jednog čovjeka: Georg'a Cantor'a. Cantor je 1873. godine iskazao jednu svoju opservaciju o postojanju mnogo više transcedentnih brojeva i mnogo više realnih brojeva nego što ima prirodnih brojeva. Zermelo je kasnije razvio ostale aksiome ovog aksiomatskog sistema koji mi studiramo u ovom tekstu pokušavajući da izbjegne pojavu paradoksa.

Aksiom beskonačnosti nam omogućava konstrukciju skupova iste veličine kao što je skup prirodnih brojeva. Da bi obezbijedili egzistenciju skupova veće beskonačnosti od skupa prirodnih brojeva, kao što je, na primjer, beskonačnost skupa realnih brojeva treba nam aksioma partitivnog skupa (Aksiom 7).

Axiom 8 (Aksiom dobre zasnovanosti (takođe: **Aksiom fundiranja** ili regulariteta)).

$$(\forall x)(x \neq \varnothing \Rightarrow (\exists y \in x)\neg(\exists z)(z \in x \wedge z \in y)).$$

Pokazalo se da je ovaj aksiom veoma važan (iako ljudi, uglavnom, zaboravljaju na njega). Na njega ćemo se posebno vratiti kada se budemo bavili induktivnim konstrukcijama.

Ako su skupovi X_1 i X_2 neprazni, tada je i skup $X \times X$ takođe neprazan. Ovu tzvrdnju možemo proširiti na svaki konačan skup skupova: Ako su skupovi X_1, X_2, ... , X_n neprazni, tada je i skup $\prod_k X_k$ takođe neprazan. Sasvim opravdano se postavlja pitanje da li gornja tvrdnja vrijedi i u opštem slučaju. Ako je $\{X_i{:}i\in I\}$ neprazna familija (disjunktnih) nepraznih skupova, da li je $\prod_{i\in I} X_i$ takođe neprazan? Ovaj zahtijev sa disjunktnim skupovima postavio je Russell 1906. godine kao aksiomu teorije skupova, a Zermelo je, kasnije, izostavio zahtjev disjunktnosti familije $\{X_i{:}i\in I\}$. Riječima iskazano, ovaj zahtjev znači: Da li postoji skup koji sadrži tačno po jedan element iz svakog člana familije $\{X_i{:}i\in I\}$? Ovaj skup, ako postoji, nazivamo *izborni skup* familije $\{X_i{:}i\in I\}$. Ako prihvatimo postojanje izbornog skupa bilo koje familije $\{X_i{:}i\in I\}$, tada taj zahtjev možemo formulisati u sljedećem obliku:

Axiom 9 (Aksiom izbora, ili **Axiom of Choice** - AC).

$$(\forall \mathsf{F})((\forall S \in \mathsf{F})(S \neq \varnothing) \Rightarrow (\exists f)(\forall T \in \mathsf{F})(f(T) \in T)).$$

Budući da je ovo aksiom u ovom sistemu, znači da je nezavisan od ostalih aksioma ovog sistema. Poznato je mnogo formula koje su ekvivalentne ovom aksiomu. Teoriju koja se sastoji od aksioma 0 – 8 nazivamo **ZF**-teorijom, dok teoriju **ZF**+**AC** nazivamo **ZFC**-teorijom skupova. Problem odnosa aksiome AC prema ostalim aksiomama ovog sistema riješio je Goedel 1939. godine. On je dokazao da je ako je **ZF** neprotivurječna teorija tada je i **ZFC** takođe neprotivurječna teorija. Sem toga, Cohen je 1963. godine pokazao da je formula **AC** nezavisna od sistema **ZF**. Preciznije, Cohen je pokazao da ako je sistem **ZF** neprotivrječan, tada je i sistem **ZF**+¬**AC** takođe neprotivrječan.

2 Parcijalni aksiomatski sistemi

Mnoge važne teoreme o skupovima dokazuju se uz korištenje samo nekih od aksioma **ZFC** - aksiomatskog sistema. Ovdje ćemo istaći neke standardne parcijalne podsisteme potpunog **ZFC**-aksiomatskog sistema:

(0) Potpuni sistem aksioma A0 – A9 nazvamo **ZFC**-sistem aksioma teorije skupova.

(2) Sistem koji se sastoji od aksioma A0 – A8 nazivamo **ZF**-aksiomatski sistem teorije skupova.

(3) Sistem A0 – A7 nazivamo $\mathbf{ZF}^-$ - sistem. Dakle, **ZFC** – {A8, A9} = $\mathbf{ZF}^-$;

(4) $\mathbf{ZF}^-$ - P = $\mathbf{ZF}^-$ - {A7} ;

Analogno se determinišu sistemi

(5) $\mathbf{ZFC}^-$ = **ZFC** – {A8};

(6) $\mathbf{ZFC}^-$ - P = $\mathbf{ZFC}^-$ - {A7} = {A0-A6,A9}.

L i t e r a t u r a:

Korištena i / ili konsultovana pri pripremanju ovopg teksta:

[1] Uri Abraham: *Proper forcing*; In: *Handbook of Set Theory* (Foreman, Kanamori, and Magidor (eds.)), Preprint 2006

[2] Barwise, J., *Admissible Sets and Structures*, Springer-Verlag, 1975.

[3] Peter J. Cameron: *Sets, Logic and Categories*; Springer-Verlag 2006.

[4] Gary Hardegree: *Basic Set Theory*; preprint 2004.

[5] Holmes, M. Randall, *Elementary Set Theory with a Universal Set*, Volume 10 of the Cahiers du Centre de logique, Academia, Louvain-la-Neuve (Belgium), 1998.

[6] Taneli Huuskonen: *Axiomatic set Theory*, Preprint 2003.

[7] Akihiro Kanamori: *Set Theory from Cantor to Cohen*; The Bulletin of Symbolic Logic, volume 2, 1996, pages 1-71

[8] Akihiro Kanamori: *Zermelo and Set Theory*; The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 10, No.4. (2004), 487-553 10

[9] Akihiro Kanamori: *Goedel and Set Theory*; Preprint 2006.

[10] T. Jech: *Set theory*. Springer 2003.

[11] Mathias A.R.D., *The strength of Mac Lane set theory*, Annals of Pure and Applied Logic, Volume 110, Number 1, (June 2001), pp. 107-234.

[12] J. D. Monk: *Set Theory II*; Preprint 2006

[13] Joseph R. Mileti: *An Introduction to Axiomatic Set Theory*; Preprint 2007.

[14] Ali Nesin: *Foundations of Mathematics I, Set Theory*; Preprint 2004.

[15] Esser, Olivier, *On the consistency of a positive theory*, Mathematical Logic Quarterly, vol. 45 (1999), no. 1, pp. 105-116.

[16] Lawrence C. Paulson: *Set Theory as a Computational Logic*; preprint, 1992.

[17] Saharon Shelah: *The Future of Set Theory*; Preprint ArXiv Math 2002.

[18] Patric Suppes and John Sheehan: *Course in Axiomatic set Theory*; Stanford University 1981

[19] William A. R. Weiss: An Introduction to Set Theory; Preprint 2006.

[20] Boban Veličković, Aleksandar Perović, Aleksandar Jovanović: *Teorija skupova*; Preprint 2006.