

BROJEVNI SISTEMI: BINARNI BROJEVI¹

Slavica Kecman, Branislav Praštalo² i Daniel A. Romano³

Prirodno-matematički fakultet Banja Luka
78000 Banja Luka, Mladena Stojanovića 2, B&H

Sažetak:

Reprezentacija brojeva u binarnoj formi generalno se počela koristiti relativno skoro, kroz njenu upotrebu u logičkoj teoriji u 19. vijeku i u kodiranju u 20. vijeku.

Binarni brojevi su, naravno, najjednostavniji način reprezentacije broja preko 0 i 1, ali može se raspravljati o njihovoj djelotvornosti. U stvari, različite baze, a ne uobičajena baza 10 koristile su se u ranijim vremenima. Na primjer, Vavilonci su, u osnovi, koristili bazu 60, i ovo je prezivjelo kao mjera za vrijeme i uglove. Nije u potpunosti jasno zasto su koristili bazu 60, ali smatra se da je to bilo zbog toga što je 60 djeljivo sa mnogim malim prirodnim brojevima.

Korištenje binarnih brojeva došlo je do izražaja sa pojavom, tokom prošlog vijeka (od 1950. godine) elektronskih (umjesto mehaničkih) mašina, kod kojih je određen uređaj ili uključen ili isključen (odnosno "1" ili "0"). Upotreba je rasla sa razvojem hardvera i softvera, iako su i druge baze (naročito baza 16) našle svoju primjenu.

Pored toga, binarni brojevi su temelj logičke teorije i Bulove algebre, a, u skorije vrijeme, ogroman razvoj u kodiranju, djelimično je zasnovan na analizi binarnog tipa, posto i on uključuje koncept korištenja "1" i "0", odnosno "uključeno" i "isključeno". Dakle, jasno je da su binarni brojevi jako bitni u modernoj primjeni.

Binarni brojevi su ovdje uključeni kako zbog svoje primjanljivosti tako i zbog činjenice da su oni osnov teorije brojeva. Oni obezbjeđuju način preispitivanja i ponavljanja osnovnog rada sa brojevima, i, iznad svega, to bi trebala biti stimulatívna tema u kojoj se uziva.

¹ Tekst predstavlja djelimično preuređeni seminarski rad studenta Slavice Kecman koji je pod mentorstvom nastavnika i saradnika radila u okvirima kursa Metodika nastave matematike i informatike 2005/06 školske godine.

² Branislav Praštalo, viši asistent na predmetu Metodika matematike, poslije kratke i teške bolesti preminuo je 2008.

³ Nastavnik na predmetu Metodika nastave matematike

Trenutna afilacija: Pedagoški fakultet Bijeljina, 76300 Bijeljina, Semberskih ratara b.b., B&H, e-mail: bato49@hotmail.com

Tekst je namjenjen nastavnicima i učenicima osnovne škole (9 razred) kao nastavni materijal za realizaciju teme 'Brojevni sistemi – binarni brojevi'.

Math. Subject Classification (2010): **97D80, 97F20, 97F30**

ZDM Subct Classification (2010): **F20, F30**

Ključne riječi i fraze: binarni brojevi

Abstract

In this paper we show a way of mathematical instruction for binary numbers in Elementary school.

1. BINARNI BROJEVI

Mi svakodnevno radimo sa brojevima baze 10. U ovom poglavlju ćemo razmatrati brojeve baze 2, koje često nazivamo *binarnim brojevima*.

U bazi 10 mi koristimo cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 (i broj 10).

U bazi 2 koristimo jedino cifre 0 i 1.

Binarni brojevi su srce svih računarskih sistema jer u električnom kolu 0 predstavlja ne trenutnoj operaciji dok 1 predstavlja trenutnu operaciju.

U bazi 10 koristimo pozicioni vrjednosni sistem, ilustrovan u sledećem primjeru :

1000 100 10 1

$$4 \quad 2 \quad 1 \quad 5 \quad \rightarrow \quad 4 \times 1000 + 2 \times 100 + 1 \times 10 + 5 \times 1$$

$$3 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad \rightarrow \quad 3 \times 1000 + 1 \times 100 + 0 \times 10 + 2 \times 1$$

Primjetimo, da bismo dobili pozicionu vrijednost za sledeću cifru sa lijeva, mi množimo sa 10. Ako bismo dodali neku cifru na početak (lijevo) broja broj bi predstavljao 10 000-e.

U bazi 2 koristimo sistem sa pozicionim vrijednostima ilustrovan na sledećem primjeru:

64 32 16 8 4 2 1

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \rightarrow \quad 1 \times 64 = 64$$

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \rightarrow \quad 1 \times 64 + 1 \times 8 + 1 \times 1 = 73$$

Primjetimo da pozicione vrijednosti počinju sa 1 i množe se sa 2 kako se pomjeramo ulijevo.

Kada jednom učenicima shvate kako pozicioni sistem funkcionise, moći će pretvarati binarne brojeve u bazu 10 i obrnuto.

Primjer 1.

Konvertovati sljedeće binarne brojeve u brojeve u bazi 10

(a) 111

(b) 101

(c) 1100110

Rješenje:

Za svaki broj razmotrimo vrijednost svake cifre

$$(a) \quad \begin{array}{ccccccc} & 4 & & 2 & & & 1 \\ & \text{-----} & & \text{-----} & & & \text{-----} \\ 1 & & 1 & & 1 & & & \end{array} \rightarrow 4 + 2 + 1 = 7$$

Binarni broj 111 je 7 u bazi 10.

$$(b) \quad \begin{array}{ccccccc} & 4 & & 2 & & & 1 \\ & \text{-----} & & \text{-----} & & & \text{-----} \\ 1 & & 0 & & 1 & & & \end{array} \rightarrow 4 + 1 = 5$$

Binarni broj 101 je 5 u bazi 10.

$$(c) \quad \begin{array}{ccccccccccc} & 64 & & 32 & & 16 & & 8 & & 4 & & 2 & & 1 \\ & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} \\ 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & \end{array} \rightarrow$$

$$64 + 32 + 4 + 2 = 102$$

Binarni broj 1100110 je 102 u bazi 10.

Primjer 2.

Konvertovati sljedeće brojeve iz baze 10 u binarne brojeve.

$$(a) 3 \qquad (b) 11 \qquad (c) 140$$

Rješenje:

Moramo zapisati ove brojeve prema pozicionim vrijednostima binarnih brojeva 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ..., itd

$$(a) \quad 3 = 2 + 1 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} & 2 & & & & & 1 \\ & \text{-----} & & & & & \text{-----} \\ 1 & & & & & & 1 & \end{array}$$

Broj 3 u bazi 10 zapisan je kao 11 u bazi 2.

$$(b) \quad 11 = 8 + 2 + 1 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} & 8 & & 4 & & 2 & & 1 \\ & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} \\ 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

Broj 11 u bazi 10 zapisan je kao 1011 u bazi 2.

$$(c) \quad 140 = 128 + 8 + 4 \quad \rightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 128 & & 64 & & 32 & & 16 & & 8 & & 4 & & 2 & & 1 \\ & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} \\ 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Broj 140 u bazi 10 zapisan je kao 10001100.

Vježbe I

1. Konvertovati sledeće binarne brojeve u bazu 10:

$$(a) 110 \qquad (b) 1111 \qquad (c) 1001$$

- | | | |
|--------------|---------------|--------------|
| (d) 1101 | (e) 10001 | (f) 11011 |
| (g) 1111111 | (h) 1110001 | (i) 10101010 |
| (j) 11001101 | (k) 111000111 | (l) 1100110 |

2. Konvertovati sledeće brojeve iz baze 10 u binarne brojeve:

- | | | |
|--------|---------|---------|
| (a) 9 | (b) 8 | (c) 14 |
| (d) 17 | (e) 18 | (f) 30 |
| (g) 47 | (h) 52 | (i) 67 |
| (j) 84 | (k) 200 | (l) 500 |

3. Konvertovati sledeće brojeve iz baze 10 u binarne brojeve:

- | | | | |
|-------|-------|--------|--------|
| (a) 5 | (b) 9 | (c) 17 | (d) 33 |
|-------|-------|--------|--------|

Opiši bilo koji obrazac koji primetiš u ovim binarnim brojevima. Koji broj u bazi 10 slijedi u ovom nizu?

4. Konvertovati sledeće brojeve iz baze 10 u binarne brojeve:

- | | | | |
|-------|-------|--------|--------|
| (a) 3 | (b) 7 | (c) 15 | (d) 31 |
|-------|-------|--------|--------|

Koji sledeći broj baze 10 nastavlja ovaj binarni obrazac?

5. Odredjeni binarni broj ima tri cifre

- Koji je najveći i najmanji mogući broj?
- Konvertuj te brojeve u bazu 10.

6. Kada se odredjeni broj iz baze 10 konvertuje dobijamo binarni broj sa 4 cifre.

Koji bi to broj u bazi 10 mogao biti?

7. Binarni broj sa 4 cifre ima dvije nule i dvije nule

- Napiši sve moguće brojeve sa ovim ciframa.
- Konvertuj ove brojeve u bazu 10.

8. Binarni broj ima 8 cifara i konvertovan je u bazu 10

- Koji je najveći mogući broj u bazi 10?
- Koji je najmanji mogući broj u bazi 10?

9. Broj 999 u bazi 10 je konvertovan u binarni broj. Koliko više cifara ima binarni broj od broja u bazi 10?

10. Izračunaj razliku između broja 11111 u bazi 10 i binarnog broja 11111.

Odgovor izraziti u bazi 10?

2. SABIRANJE I ODUZIMANJE BINARNIH BROJEVA

Moguće je sabirati i oduzimati binarne brojeve slično kao i brojeve u bazi 10. Npr. $1 + 1 + 1 = 3$ u bazi 10 postaje $1 + 1 + 1 = 11$ za binarne brojeve. Analogno, $3 - 1 = 2$ u bazi 10 postaje $11 - 1 = 10$ za binarne brojeve. Kada sabirate i oduzimate

binarne brojeve morate biti oprezni kad “prenosite” ili “posuđujete”, kao što će se ovdje često dešavati.

Ključni rezultati za sabiranje binarnih brojeva

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 10$$

$$1 + 1 + 1 = 11$$

Ključni rezultati za oduzimanje binarnih brojeva

$$1 - 0 = 1$$

$$10 - 1 = 1$$

$$11 - 1 = 10$$

Primjer 1.

Izračunajte, koristeći binarne brojeve :

(a) $111 + 100$

(b) $101 + 110$

(c) $1111 + 111$

Rješenje:

$$(a) \begin{array}{r} 111 \\ + 100 \\ \hline 1011 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$(b) \begin{array}{r} 101 \\ + 110 \\ \hline 1011 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$(c) \begin{array}{r} 1111 \\ + 111 \\ \hline 10110 \\ \hline 111 \end{array}$$

Primjetiti kako je vazno ispravni “prenijeti”

Primjer 2.

Izračunajte binarne brojeve :

(a) $111-101$

(b) $110 - 11$

(c) $1100-101$

Rješenje:

$$(a) \begin{array}{r} 111 \\ -101 \\ \hline 10 \end{array} \quad (b) \begin{array}{r} 110 \\ -11 \\ \hline 11 \end{array} \quad (c) \begin{array}{r} 1100 \\ -101 \\ \hline 111 \end{array}$$

Vježbe II

1. Izračunajte binarne brojeve :

(a) $11 + 1$

(b) $11 + 11$

(c) $111 + 11$

(d) $111 + 10$

(e) $1110 + 111$

(f) $1100 + 110$

(g) $1111 + 10101$

(h) $1100 + 11001$

(i) $1011 + 1101$

(j) $1110 + 10111$

(k) $1110 + 1111$

(l) $11111 + 11101$

2. Izračunajte binarne brojeve :

- | | | |
|---------------------|-------------------|-------------------|
| (a) $11 - 10$ | (b) $110 - 10$ | (c) $1111 - 110$ |
| (d) $100 - 10$ | (e) $100 - 11$ | (f) $1000 - 11$ |
| (g) $1101 - 110$ | (h) $11011 - 110$ | (i) $1111 - 111$ |
| (j) $110101 - 1010$ | (k) $11011 - 111$ | (l) $11011 - 111$ |

3. Izračunajte binarne brojeve :

- | | |
|-------------------|---------------------|
| (a) $11 + 11$ | (b) $111 + 111$ |
| (c) $1111 + 1111$ | (d) $11111 + 11111$ |

Opiši u odgovoru bilo koji obrazac koji primjetiš.

4. Izračunajte binarne brojeve :

- | | |
|-------------------|---------------------|
| (a) $10 + 10$ | (b) $100 + 100$ |
| (c) $1000 + 1000$ | (d) $10000 + 10000$ |

Opiši u odgovoru bilo koji obrazac koji primjetiš.

5. Riješi jednačine, uzevši u obzir da su svi brojevi, uključujući i x , binarni

- | | |
|------------------------|------------------------|
| (a) $x + 11 = 1101$ | (b) $x - 10 = 101$ |
| (c) $x - 1101 = 11011$ | (d) $x + 1110 = 10001$ |
| (e) $x + 111 = 11110$ | (f) $x - 1001 = 11101$ |

6. Izračunajte binarne brojeve :

- | | |
|----------------|-----------------|
| (a) $10 - 1$ | (b) $100 - 1$ |
| (c) $1000 - 1$ | (d) $10000 - 1$ |

Opiši u odgovoru bilo koji obrazac koji primjetiš.

7. (a) Konvertovati binarne brojeve 11101 i 1110 u bazu 10.

- (b) Saberi ta dva broja iz baze 10
 (c) Saberi ta dva binarna broja
 (d) Konvertuj rezultat pod (c) u bazu 10 i uporedi ga sa rezultatom pod (b).

8. (a) Konvertovati binarne brojeve 11101 i 10111 u bazu 10.

- (b) Izračunaj razliku ta dva broja u bazi 10
 (c) Konvertuj rezultat pod (b) u binarni broj.
 (d) Izračunaj razliku između dva binarna broja i uporedi je sa rezultatom pod (c)

9. Imamo tri binarna broja:

1110101 1011110 1010011

Radeci u binarnoj bazi:

- (a) saberi dva manja broja.
 (b) saberi dva veća broja
 (c) oduzmi najmanji broj od najvećeg
 (d) saberi sva tri broja.

10. Izračunajte binarne brojeve :

(a) $111 + 101 + 100$

(b) $11101 + 10011 + 110111$

3. MNOŽENJE BINARNIH BROJEVA.

I binarni brojevi se mogu množiti i to ćemo istražiti u ovom poglavlju. Primjetimo da je množenje brojevima 10, 100 i 1000 vema slično kao množenje u bazi 10.

Primjer 1

Izračunajte binarne brojeve:

(a) 1011×100

(b) 110110×1000

(c) 11011×10000

Provjeri rješenja tako što ćeš konvertovati svaki broj u bazu 10.

Rješenje

(a) $1011 \times 100 = 101100$

(b) $110110 \times 1000 = 110110000$

(c) $11011 \times 10000 = 110110000$

Provjera

$$(a) \quad \begin{array}{cccc} 8 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \rightarrow 8 + 2 + 1 = 11$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow 4$$

$$\begin{array}{cccccc} 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow 32 + 8 + 4 = 44 \text{ i } 11 \times 4 = 44,$$

kao što je očekivano.

$$(c) \quad \begin{array}{ccccc} 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \rightarrow 16 + 8 + 2 + 1 = 27$$

$$\begin{array}{ccccc} 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow 16$$

$$\begin{array}{cccccccc} 256 & 128 & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow 256 + 128 + 32 + 16 = 432$$

i $27 \times 16 = 432$, kao što je očekivano.

Primjedba: Očigledno je da je djelotvornije zadržati brojeve u binarnom obliku kad vršimo izračunavanja.

Primjer 2.

Izračunajte binarne brojeve:

(a) 1011×11

(b) 1110×101

(c) 11011×111

(d) 11011×1001

Rješenje

(a)	$\begin{array}{r} 1011 \\ \times \quad 11 \\ \hline 1011 \\ 10110 \\ \hline 100001 \\ 1111 \end{array}$	(b)	$\begin{array}{r} 1110 \\ \times \quad 101 \\ \hline 1110 \\ 111000 \\ \hline 1000110 \\ 111 \end{array}$	(c)	$\begin{array}{r} 11011 \\ \times \quad 111 \\ \hline 11011 \\ 110110 \\ 1101100 \\ \hline 10111101 \\ 111111 \end{array}$	(d)	$\begin{array}{r} 11011 \\ \times \quad 1001 \\ \hline 11011 \\ 110110 \\ 1101100 \\ 11110011 \\ \hline 11 \end{array}$
-----	--	-----	--	-----	--	-----	---

Vježbe III

1. Izračunajte binarne brojeve:

(a) 111×10

(b) 1100×100

(c) 101×1000

(d) 11101×1000

(e) 11000×10

(f) 10100×1000

(g) $10100 \div 10$

(h) $1100 \div 100$

Provjeri rezultate konvertovanjem brojeva u bazu 10.

2. Izračunajte binarne brojeve:

(a) 111×11

(b) 1101×11

(c) 1101×101

(d) 1111×110

(e) 11011×1011

(f) 11010×1011

(g) 10101×101

(h) 10101×111

(i) 10101×110

(j) 100111×1101

3. Riješiti jednačine, u kojima su svi brojevi, uključujući i x , binarni

(a) $\frac{x}{11} = 110$

(b) $\frac{x}{101} = 101$

(c) $\frac{x}{10} = 111$

(d) $\frac{x}{111} = 1011$

4. Kvadriraj sledeće brojeve:

- (a) 11 (b) 111 (c) 1111

Šta primjećuješ vezano za rezultate?

Šta ćeš dobiti ako kvadriraš broj 11111 ?

5. Kvadriraj sledeće brojeve:

- (a) 101 (b) 1001 (c) 10001 (d) 100001

Šta očekuješ da ćeš dobiti ako kvadriraš broj 1000001 ?

6. Izračunajte binarne brojeve:

- (a) 101 (110 + 1101) (b) 1101 (1111 – 110)
(c) 111 (1000 – 101) (d) 1011 (10001 – 1010)

7. Data su tri binarna broja:

11011 11100 10011

Radeći u binarnoj bazi:

- (a) pomnoži dva veća broja
(b) pomnoži dva manja broja.

8. (a) Pomnoži u bazi 10 brojeve 45 i 33

(b) Konvertuj rezultat u binarni broj.

(c) Konvertuj 45 i 33 u binarne brojeve

(d) Pomnoži binarne brojeve iz dijela (c) i uporedi rezultat sa rezultatom dijela (b)

4. DRUGE BAZE

Ideja koju smo razmotrili biće primjenjena i na druge numeričke baze.

Ova tabela sadrži cifre koje se koriste u nekim drugim bazama.

Baza	Cifre koje se koriste
2	0, 1
3	0, 1, 2
4	0, 1, 2, 3
5	0, 1, 2, 3, 4

Pri konvertovanju u bazu 10 pozicionu vrijednost dobijamo stepenovanjem baze. Npr, za bazu 3, pozicione vrijednosti su stepeni broja 3, tj. 1, 3, 9, 27, 81, 243... Ovo je pokazano u primjerima koji slijede, u kojima se, takodje, vidi da je u bazi 3 broj 12100 ekvivalentan broju 144 u bazi 10.

$$\begin{array}{cccccc} \text{Baza 3} & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \rightarrow \\ & (1 \times 81) & + (2 \times 27) & + (1 \times 9) & + (0 \times 3) & + (0 \times 1) = & 144 \text{ u bazi 10} \end{array}$$

Primjer koji slijedi pokazuje konverziju broja iz baze 5 u bazu 10 korištenjem stepena broja 5 kao pozicionih vrijednosti

$$\begin{array}{r} \text{Baza 5} \quad \underline{625} \quad \underline{125} \quad \underline{25} \quad \underline{5} \quad \underline{1} \\ \quad \quad \quad 4 \quad \quad 1 \quad \quad 0 \quad \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad \rightarrow \\ (4 \times 625) + (1 \times 125) + (0 \times 25) + (0 \times 5) + (1 \times 1) = 2626 \text{ u bazi 10} \end{array}$$

Primjer 1.

Konvertuj svaki od sledećih brojeva u bazu 10:

- (a) 412 iz baze 6
- (b) 374 iz baze 9
- (c) 1432 iz baze 5

Rješenje

$$(a) \quad \begin{array}{r} \underline{36} \quad \underline{6} \quad \underline{1} \\ 4 \quad \quad 1 \quad \quad 2 \end{array} \rightarrow (4 \times 36) + (1 \times 6) + (2 \times 1) = 152 \text{ u bazi 10}$$

$$(b) \quad \begin{array}{r} \underline{81} \quad \underline{9} \quad \underline{1} \\ 3 \quad \quad 7 \quad \quad 4 \end{array} \rightarrow (3 \times 81) + (7 \times 9) + (4 \times 1) = 310 \text{ u bazi 10}$$

$$(c) \quad \begin{array}{r} \underline{125} \quad \underline{25} \quad \underline{5} \quad \underline{1} \\ 1 \quad \quad 4 \quad \quad 3 \quad \quad 2 \end{array} \rightarrow (1 \times 125) + (4 \times 25) + (3 \times 5) + (2 \times 1) \\ = 242 \text{ u bazi 10}$$

Primjer 2.

Konvertuj svaki od sledećih brojeva iz baze 10 u bazu koja je navedena,

- (a) 472 u bazu 4
- (b) 179 u bazu 7
- (c) 342 u bazu 3

Rješenje

- (a) Za bazu 4 pozicione vrijednosti su 256, 64, 16, 4, 1 i treba izraziti broj 472 kao linearnu kombinaciju ovih brojeva, ali ne sa množiocem većim od 3.

Počinjemo sa zapisom

$$472 = (1 \times 256) + 216$$

Sledeći korak je zapisati ostatak 216 kao linearnu kombinaciju brojeva 64, 16, 4, 1

Koristimo činjenicu da je

$$216 = (3 \times 64) + 24$$

i nastavljajući ovaj postupak

$$24 = (1 \times 16) + 8$$

$$8 = (2 \times 4) + 0$$

Stavivši sve ovo zajedno dobijemo

$$472 = (1 \times 256) + (3 \times 64) + (1 \times 64) + (2 \times 4) + (0 \times 1) = 13120 \text{ u bazi 4}$$

(b) Za bazu 7 pozicione vrijednosti su 49, 7, 1

$$179 = (3 \times 49) + (4 \times 7) + (4 \times 1) = 344 \text{ u bazi 7}$$

(c) Za bazu 3 pozicione vrijednosti su 243, 81, 27, 9, 3, 1

$$342 = (1 \times 243) + (1 \times 81) + (0 \times 27) + (2 \times 9) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 110200 \text{ u bazi 3}$$

Primjer 3

Prenesi svaku od sledećih operacija u navedenu bazu:

(a) $14 + 21$ baza 5

(b) $16 + 32$ baza 7

(c) $141 + 104$ baza 5

(d) $212 + 121$ baza 3

Provjeri svoj odgovor pod (a) tako što ćeš konvertovati brojeve u bazu 10

Rješenje

$$\begin{array}{r} (a) \quad 14 \\ \quad + 21 \\ \hline \quad 40 \\ \quad \quad 1 \end{array}$$

Primjetimo da je $4 + 1 = 10$ u bazi 5

$$\begin{array}{r} (b) \quad 16 \\ \quad + 32 \\ \hline \quad 51 \end{array}$$

1
2

Primjetimo da je $6 + 2 = 11$ u bazi 7

$$\begin{array}{r} (c) \quad 141 \\ \quad + 104 \\ \hline \quad 300 \\ \quad \quad 11 \end{array}$$

Primjetimo da je $1 + 4 = 10$ u bazi 5

$$\begin{array}{r} (d) \quad 212 \\ \quad + 121 \\ \hline \quad 1110 \\ \quad \quad 111 \end{array}$$

Primjetimo da je, u bazi 3

$$2 + 1 = 10$$

$$1 + 2 + 1 = 11$$

$$2 + 1 + 1 = 11$$

Provjeriti pod (a)

$$(a) \quad \begin{array}{r} 5 \text{-----} 1 \\ 1 \quad \quad 4 \end{array}$$

$$\rightarrow (1 \times 5) + (4 \times 1) = 9$$

$$\begin{array}{r} 5 \text{-----} 1 \\ 2 \quad 1 \end{array} \rightarrow (2 \times 5) + (1 \times 1) = 11$$

$$\begin{array}{r} 5 \text{-----} 1 \\ 4 \quad 0 \end{array} \rightarrow (4 \times 5) + (0 \times 1) = 20$$

i, $9 + 11 = 20$, kao što je i bilo očekivano.

Primjer 4.

Prenesi sledeće operacije u navedenu bazu

(a) 141×23 u bazu 5

(b) 122×12 u bazu 3

(c) 512×24 u bazu 6

Svoj odgovor pod (b) provjeri konvertovanjem u bazu 10.

Rješenje:

(a)
$$\begin{array}{r} 141 \\ \times 23 \\ \hline 1023 \\ 3320 \\ \hline 4343 \end{array}$$
 Primjetimo da je bazi 5
 $3 \times 4 = 22$
 $2 \times 4 = 13$

(b)
$$\begin{array}{r} 122 \\ \times 12 \\ \hline 1021 \\ 1220 \\ \hline 10011 \\ \hline 111 \end{array}$$
 Primjetimo da je u bazi 3
 $2 \times 2 = 11$

(c)
$$\begin{array}{r} 512 \\ \times 24 \\ \hline 3252 \\ 14240 \\ \hline 21532 \\ \hline 11 \end{array}$$
 Primjetimo da je u bazi 6
 $2 \times 4 = 12$
 $4 \times 5 = 32$
 $2 \times 5 = 14$

Provjera odgovora pod (b)

(b)
$$\begin{array}{r} 9 \text{-----} 3 \text{-----} 1 \\ 1 \quad 2 \quad 2 \end{array} \rightarrow (1 \times 9) + (2 \times 3) + (2 \times 1) = 17$$

$$\begin{array}{r} 3 \text{-----} 1 \\ 1 \quad 2 \end{array} \rightarrow (1 \times 3) + (2 \times 1) = 5$$

$$\begin{array}{cccccc} 8 & 1 & & 2 & 7 & & 9 & & 3 & & 1 \\ \hline 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 \end{array} \rightarrow$$

$$(1 \times 81) + (0 \times 27) + (0 \times 9) + (1 \times 3) + (1 \times 1) = 85$$

a, $17 \times 5 = 85$, kao što je bilo očekivano.

Vježbe IV

1. Konvertuj sledeće brojeve iz navedene baze u bazu 10:

- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| (a) 412 | u bazi 5 | (b) 333 | u bazi 4 |
| (c) 728 | u bazi 9 | (d) 1210 | u bazi 3 |
| (e) 1471 | u bazi 8 | (f) 612 | u bazi 7 |
| (g) 351 | u bazi 6 | (h) 111 | u bazi 3 |

2. Konvertuj sledeće brojeve iz baze 10 u navedenu bazu:

- | | | | |
|---------|----------|---------|----------|
| (a) 24 | u bazu 3 | (b) 16 | u bazu 4 |
| (c) 321 | u bazu 5 | (d) 113 | u bazu 6 |
| (e) 314 | u bazu 7 | (f) 84 | u bazu 9 |
| (g) 142 | u bazu 3 | (h) 617 | u bazu 5 |

3. Prenesi sledeća sabiranja u navedenu bazu:

- | | | | |
|-------------|----------|-------------|----------|
| (a) $3 + 2$ | u bazu 4 | (b) $5 + 8$ | u bazu 9 |
| (c) $4 + 6$ | u bazu 8 | (d) $2 + 2$ | u bazu 3 |
| (e) $6 + 7$ | u bazu 9 | (f) $3 + 4$ | u bazu 6 |

4. U kojoj bi bazi svaki od sledećih brojeva mogao biti zapisan:

- (a) 123 (b) 112 (c) 184

5. Prenesi svaku od sledećih operacija u navedenu bazu:

- | | | | |
|-----------------|----------|-----------------|----------|
| (a) $13 + 23$ | u bazu 4 | (b) $120 + 314$ | u bazu 5 |
| (c) $222 + 102$ | u bazu 3 | (d) $310 + 132$ | u bazu 4 |
| (e) $624 + 136$ | u bazu 7 | (f) $211 + 142$ | u bazu 5 |
| (g) $333 + 323$ | u bazu 4 | (h) $141 + 424$ | u bazu 5 |

Odgovore pod (a), (c) i (e) provjeri konvertovanjem u bazu 10.

6. Prenesi svako od sledećih množenja u navedenu bazu:

- | | | | |
|------------------|----------|------------------|----------|
| (a) 3×2 | u bazu 4 | (b) 4×3 | u bazu 5 |
| (c) 4×2 | u bazu 6 | (d) 3×5 | u bazu 6 |
| (e) 2×2 | u bazu 3 | (f) 8×8 | u bazu 9 |

7. Prenesi svako od sledećih množenja u navedenu bazu:

- | | | | |
|---------------------|----------|---------------------|----------|
| (a) 121×11 | u bazu 3 | (b) 133×12 | u bazu 4 |
| (c) 13×24 | u bazu 5 | (c) 142×14 | u bazu 5 |
| (e) 161×24 | u bazu 7 | (f) 472×32 | u bazu 8 |

(g) 414×22 u bazu 5 (h) 2101×21 u bazu 3
Odgovore pod (a), (c) i (e) provjeri konvertovanjem u bazu 10.

8. U koju bazu je prenešena svaka od sledećih operacija?
- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| (a) $4 + 2 = 11$ | (b) $7 + 5 = 13$ |
| (c) $8 \times 2 = 17$ | (d) $4 \times 5 = 32$ |
| (e) $11 - 3 = 5$ | (f) $22 - 4 = 13$ |
9. (a) Konvertuj broj 147 iz baze 8 u bazu 3
(b) Konvertuj broj 321 iz baze 4 u bazu 7
(c) Konvertuj broj 172 iz baze 9 u bazu 4
(d) Konvertuj broj 324 iz baze 5 u bazu 6
10. U koju bazu je prenešena svaka od sledećih operacija?
- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| (a) $171 \times 12 = 2272$ | (b) $122 \times 21 = 11102$ |
| (c) $24 \times 32 = 1252$ | (d) $333 \times 33 = 23144$ |

5. MENTALNI TESTOVI ZA UČENIKE (kod organizacije diferencirane nastave)

5.1. Standardni nivo (bez klakulatora)

- | | |
|---|-------|
| 1. U binarnom sistemu, izračunaj $1 + 1$. | (10) |
| 2. Konvertuj iz baze 10 broj 4 u binarni broj. | (100) |
| 3. Konvertuj binarni broj 11 u bazu 10. | (3) |
| 4. U binarnom sistemu, izračunaj 11×10 . | (110) |
| 5. U binarnom sistemu, izračunaj $11 + 1$ | (100) |
| 6. Konvertuj iz baze 10 broj 5 u binarni broj. | (101) |
| 7. Konvertuj binarni broj 1000 u bazu 10. | (8) |
| 8. U binarnom sistemu, izračunaj $10 - 1$ | (1) |
| 9. U binarnom sistemu, izračunaj $10 + 10$ | (100) |
| 10. Konvertuj binarni broj 110 u bazu 10. | (6) |

5.2. Akademski nivo (bez kalkulatora)

- | | |
|--|----------|
| 1. U binarnom sistemu, izračunaj $11 + 1$ | (100) |
| 2. U binarnom sistemu, izračunaj $10 - 1$ | (1) |
| 3. Konvertuj binarni broj 1000 u bazu 10. | (8) |
| 4. Konvertuj binarni broj 101 u bazu 10. | (5) |
| 5. Konvertuj binarni broj 111 u bazu 10. | (7) |
| 6. Konvertuj iz baze 10 broj 10 u binarni broj. | (1010) |
| 7. U binarnom sistemu, izračunaj 101×10 | (1010) |
| 8. Konvertuj binarni broj 1111 u bazu 10. | (15) |
| 9. Konvertuj iz baze 10 broj 33 u binarni broj. | (100001) |
| 10. Konvertuj iz baze 10 broj 22 u binarni broj. | (10110) |

5.3. Napredni nivo (bez kalkulatora)

1. U binarnom sistemu, izračunaj $111 + 1$ (1000)
2. U binarnom sistemu, izračunaj $1010 + 10$ (101)
3. Konvertuj iz baze 10 broj 33 u binarni broj. (100001)
4. U binarnom sistemu, izračunaj $100 - 1$ (11)
5. Konvertuj binarni broj 1011 u bazu 10. (11)
6. Konvertuj binarni broj 10001 u bazu 10. (17)
7. Konvertuj iz baze 10 broj 66 u binarni broj. (1000010)
8. Konvertuj iz baze 10 broj 100 u binarni broj. (1100100)
9. Konvertuj binarni broj 11011 u bazu 10. (27)
10. U binarnom sistemu, izračunaj 11×11 (1001)

6. DODATNE VJEŽBE**Vježbe 6.1.**

1.1. Konvertuj svaki od sledećih binarnih brojeva u bazu 10 :

- | | | |
|------------|------------|-------------|
| (a) 11 | (b) 1011 | (c) 11101 |
| (d) 100011 | (e) 101101 | (f) 1001001 |
| (g) 110010 | (h) 111101 | (i) 110111 |

1.2. Napiši svaki od sledećih brojeva iz baze 10 kao binarni broj :

- | | | |
|--------|---------|--------|
| (a) 12 | (b) 38 | (c) 15 |
| (d) 61 | (e) 102 | (f) 90 |
| (g) 82 | (h) 44 | (i) 56 |

- 1.3.** (a) Koji je *najveći* mogući binarni broj sa pet cifara ?
 (b) Koji je *najmanji* mogući broj sa pet cifara ?
 (c) Konvertuj odgovore pod (a) i (b) u bazu 10.

Rješenja:

- | | | |
|--------------|-------------|-------------|
| 1. (a) 3 | (b) 11 | (c) 29 |
| (d) 35 | (e) 45 | (f) 73 |
| (g) 50 | (h) 61 | (i) 55 |
| 2. (a) 1100 | (b) 100110 | (c) 1111 |
| (d) 111101 | (e) 1100110 | (f) 1011010 |
| (g) 1010010 | (h) 101100 | (i) 111000 |
| 3. (a) 11111 | (b) 10000 | (c) 31 i 16 |

Vježbe 6.2.

2.1. Izračunaj u binarnoj aritmetici:

- | | | | | | |
|-----|----------------|-----|---------------|-----|-----------------|
| (a) | $1 + 1$ | (b) | $1 + 101$ | (c) | $11 + 101$ |
| (d) | $111 + 101$ | (e) | $110 + 101$ | (f) | $111 + 111$ |
| (g) | $11011 + 1101$ | (h) | $1110 + 1011$ | (i) | $11011 + 11101$ |

2.2. Izračunaj u binarnoj aritmetici:

- | | | | | | |
|-----|----------------|-----|----------------|-----|-----------------|
| (a) | $11 - 1$ | (b) | $10 - 1$ | (c) | $111 - 100$ |
| (d) | $1011 - 110$ | (e) | $1111 - 101$ | (f) | $1000 - 11$ |
| (g) | $10000 - 1110$ | (h) | $11010 - 1101$ | (i) | $110111 - 1101$ |

2.3. Riješi jednačine u kojima su svi brojevi binarni.

- | | | | |
|-----|-------------------|-----|---------------------|
| (a) | $x - 111 = 1010$ | (b) | $x - 101 = 1101$ |
| (c) | $x + 11 = 110$ | (d) | $x + 111 = 1101$ |
| (e) | $x - 1011 = 1101$ | (f) | $x + 10111 = 11100$ |

Rješenja:

- | | | | | | | |
|----|-----|--------|-----|-------|-----|--------|
| 1. | (a) | 10 | (b) | 110 | (c) | 1000 |
| | (d) | 1100 | (e) | 1011 | (f) | 1110 |
| | (g) | 101000 | (h) | 11001 | (i) | 111000 |
| 2. | (a) | 10 | (b) | 1 | (c) | 1000 |
| | (d) | 101 | (e) | 1010 | (f) | 101 |
| | (g) | 10 | (h) | 1101 | (i) | 101010 |
| 3. | (a) | 10001 | (b) | 10010 | (c) | 11 |
| | (d) | 110 | (e) | 11000 | (f) | 101 |

Vježbe 6.3.**3.1.** Izračunajte u binarnoj aritmetici :

- | | | | |
|-----|---------------------|-----|--------------------|
| (a) | 1101×10 | (b) | 10110×100 |
| (c) | 11101×1000 | (d) | $1010100 \div 100$ |

3.2. Izračunajte u binarnoj aritmetici :

- | | | | |
|-----|--------------------|-----|--------------------|
| (a) | 101×11 | (b) | 1111×101 |
| (c) | 1011×110 | (d) | 1101×111 |
| (e) | 10001×111 | (f) | 10011×110 |
| (g) | 1101×110 | (h) | 10111×111 |

3.3. Kvadriraj sledeće binarne brojeve :

- | | | | | | |
|-----|------|-----|------|-----|-------|
| (a) | 1 | (b) | 10 | (c) | 110 |
| (d) | 1101 | (e) | 1011 | (f) | 10011 |

Rješenja:

- | | | | | | | | | |
|----|-----|-------|-----|---------|-----|----------|-----|-------|
| 1. | (a) | 11010 | (b) | 1011000 | (c) | 11101000 | (d) | 10101 |
|----|-----|-------|-----|---------|-----|----------|-----|-------|

2. (a) 1111 (b) 1001011 (c) 1000010 (d) 1011011
 (e) 1110111 (f) 1110010 (g) 1001110 (h) 10100001
3. (a) 1 (b) 100 (c) 100100
 (d) 10101001 (e) 1111001 (f) 101101001

Vježbe 6.4.

4.1. Konvertuj sledeće brojeve iz navedene baze u bazu 10 :

- | | | | |
|---------|--------|----------|--------|
| (a) 122 | baza 3 | (b) 312 | baza 4 |
| (c) 142 | baza 5 | (d) 1125 | baza 6 |
| (e) 178 | baza 9 | (f) 243 | baza 5 |
| (g) 615 | baza 7 | (h) 342 | baza 6 |

4.2. Konvertuj brojeve iz baze 10 u navedenu bazu :

- | | | | |
|---------|----------|---------|----------|
| (a) 47 | u bazu 3 | (b) 17 | u bazu 4 |
| (c) 108 | u bazu 5 | (d) 99 | u bazu 6 |
| (e) 142 | u bazu 7 | (f) 362 | u bazu 8 |
| (g) 142 | u bazu 9 | (h) 97 | u bazu 4 |

4.3. Izračunaj, u navedenoj bazi :

- | | | | |
|--------------------|--------|--------------------|--------|
| (a) $142 + 233$ | baza 5 | (b) $463 + 354$ | baza 8 |
| (c) $121 + 122$ | baza 3 | (d) $683 + 478$ | baza 9 |
| (e) $412 - 332$ | baza 5 | (f) 12×32 | baza 4 |
| (g) 36×25 | baza 7 | (h) 64×16 | baza 8 |

Rješenja:

1. (a) 17 (b) 54 (c) 47 (d) 269
 (e) 152 (f) 73 (g) 306 (h) 134
2. (a) 1202 (b) 101 (c) 413 (d) 243
 (e) 262 (f) 552 (g) 167 (h) 1201
3. (a) 430 (b) 1037 (c) 1020 (d) 1272
 (e) 30 (f) 1110 (g) 1332 (h) 1330

Literatura

- [1] Brojni sistemi; <http://www.vps.ns.ac.yu/nastavnici/Materijal/mat302.pdf> (10.04.2009)
- [2] Veljko Malbaša sa saradnicima: *Brojevnii sistemi, konverzije između brojevnii sistema, Bulova logika, logička kola*, <http://www.elektronika.ftn.uns.ac.rs/images/file/2godina/udime/vezbe/vezba1i2.pdf> (10.04.2009)
- [3] Ljubomir Milanov: *Brojevnii sistemi i brojanje*; Beoknjiga, Beograd
- [4] D.A.Romano: *Diferencirana nastava matematike u osnovnoj školi*; In: The Second International Conference "Informatics, Educational Technology and New Media in Education, Sombor 2005, April 1-2, 154-163

[5] Teorija brojeva; <http://antje.users.cg.yu/broj~sist.htm> (11.04.2009.)

Primljen: 11.04.2009. / 04.05.2011.

NAPOMENA

Tekst je svojevremeno ponuđen elektronskom časopisu “*Matematika i Informatika*”, koji uređuje i publikuje Odsjek za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu. Zbog (privremenog?) prestanka uzlaženja tog časopisa, tekst je povučen i ovdje se pojavljuje u istom obliku koji je ponuđen tom časopsu.