MAT-KOL (Banja Luka)
XVII (1) (2011), 49-54

ISSN 0354-6969 (p)
ISSN 1986-5228 (o)
Metodika matematike

RAZNI DOKAZI JEDNE TEOREME IZ GEOMETRIJE

(Miscellaneous proofs of one geometric theorem)

Dragoljub Milošević[1)]

Sažetak: U radu je dato osam različitih dokaza jedne teoreme koja se odnosi na pravilni sedmougao.

Ključne riječi: pravilni sedmougao, stranica i dijagonala pravilnog sedmougla, slični trouglovi, simetrala unutrašnjeg ugla trougla, lema, Ptolemejeva i Pitagorina teorema, adicione formule za sinus i kosinus, sinusna i kosinusna teorema, Molvajdova formula.

Abstract: In this paper we give eight miscellaneous proofs of a theorem for the regular septagon.

Key words and phrases: regular saeptagon, side and dijagonals of regular septagon, similar triangles, angle-bisector, lemma, Ptolemy's and Pythagorean theorem, addition formulas for sine and cosine, sine and cosine law, Mollweide's formula.

AMS Subject Classification (2010): 51M04, 97G40
ZDM Subject Classification (2010): G40

Postoje određene teoreme koje mogu da se dokažu na jedan jedinstven način. One nas podsećaju na planinski vrh koji može da se "osvoji" samo s jedne strane. Međutim, postoje i teoreme koje omogućavaju "osvajanje s više strana", tj. postoji više puteva što vode do njenog dokaza. Takve teoreme omogućavaju da iskažemo svo naše bogatstvo ideja, dosetki, dovitljivosti i inventivnosti.

Matematičko iskustvo učenika bilo bi nepotpuno ako mu nikada ne bismo dali priliku da pokuša dokazati neku teoremu na više načina. Dokazivanjem teoreme na različite načine učenik stiče samopouzdanje, istražuje i gradi svoju matematičku zrelost.

Teorema. U pravilnom sedmouglu $ABCDEFG$ važi jednakost

[1)] 17. NOU divizije 43, 32300 Gornji Milanovac, Srbija, e-mail:dramil47@gmail.com

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}.$$

Dokaz 1. Ako sa a,d i D označimo redom dužine stranice, manje dijagonale i veće dijagonale pravilnog sedmougla $ABCDEFG$, navedena jednakost postaje

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{d}+\frac{1}{D},$$

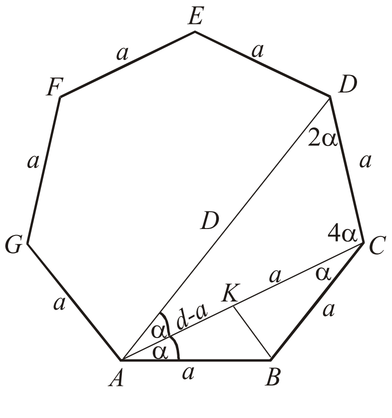
što je ekvivalentno sa

$$Dd=a\left(D+d\right). \qquad (*).$$

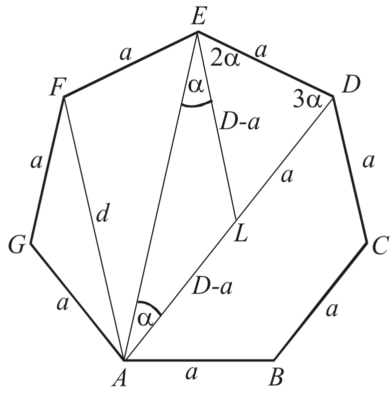
Neka je 2α veličina centralnog ugla nad stranicama datog sedmougla. Tada je $2\alpha=\frac{2\pi}{7}$, tj. $\alpha=\frac{\pi}{7}$. Odgovarajući periferisjki ugao je α. S obzirom da je spoljašnji ugao jednak centralnom uglu, tj. 2α, to je unutrašnji ugao pravilnog sedmougla $7\alpha-2\alpha=5\alpha$. Tada je $\angle ACD = \angle BCD - \angle ACB = 5\alpha - \alpha = 4\alpha$. (sl.1). Zbog $\angle CAD = \alpha$ i $\angle ACD = 4\alpha$, u trouglu ΔACD je $\angle CDA = 7\alpha - (\alpha + 4\alpha) = 2\alpha$. Dakle, uglovi trougla čije su stranice dužine a,d,D redom su: $\alpha, 2\alpha, 4\alpha$.

Na dijagonali AC odredimo tačku K tako da $CK=BC=a$, što znači da je $AK=d-a$. Uglovi jednakokrakog trougla ΔBCK su $\angle BCK$ i $\angle CBK = \angle CKB = 3\alpha$, pa je $\angle AKB = 4\alpha$. Zbog $\angle BAK = \alpha$ i $\angle AKB = 4\alpha$, je $\angle ABK = 2\alpha$.

Trouglovi ΔABK i ΔACD imaju jednake uglove, pa su slični. Iz te sličnosti proizilazi $AB:AD=AK:AC$, ili $a:D=\left(d-a\right):d$, odakle je $Dd=a\left(D+d\right)$, tj. $(*)$.



sl.1



sl.2

Dokaz 2. Na većoj dijagonali AD odredimo tačku L tako da $DL=DE$ (sl.2). Tada je $AL=D-a$. Kako je trougao ΔDEL jednakokraki i $\angle LDE = 5\alpha - 2\alpha = 3\alpha$, sledi da je $\angle DEL = \angle DLE = 2\alpha$. Trougao ΔADE je također, jednakokraki $\left(AD=AE=D\right)$, pa je $\angle AED = \angle LDE = 3\alpha$ i $\angle LEA = \angle LAE = \alpha$. To, pak, znači da je trougao ΔALE jednakokraki, tj. $EL=LA=D-a$. Trouglovi ΔALE i ΔAFG su slični, pa je $AE : AF = AL : AG$, odnosno $D : d = (D - a) : a$. Odavde proizilazi jednakost ($*$).

Dokaz 3. Produžimo stranicu AB do tačke M tako da $AM = AC = d$ (sl.3). Tada je $BM = d - a$. Trougao ΔAMC je jednakokraki, pa je $\angle AMC = \angle ACM = (7\alpha - \alpha):2 = 3\alpha$. Zbog $\angle ACB = \alpha$, $\angle ACM = 3\alpha$ i $\angle BCM = \angle ACM - \angle ACB$, imamo $\angle BCM = 2\alpha$. Kako je i $\angle CBM = 2\alpha$ (spoljašnji ugao za trougao ΔABC), zaključujemo da trouglovi ΔBCM i ΔDEL imaju jednake uglove, pa je $\Delta BCM \sim \Delta DEL$. Tada je $BC : EL = BM : DL$, ili $a : (D - a) = (d - a) : a$. Otuda je $Dd = aD + ad$, tj. ($*$).

Dokaz 4. Na osnovu kosinusne teoreme primenjene na trougao ΔBCD (sl.4) imamo $a^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$, tj.

$$\cos\alpha = \frac{d}{2a}. \tag{1}$$

Primenom te teoreme na trouglove ΔABD i ΔADE dobijamo

$$a^2 = D^2 + d^2 - 2Dd\cos\alpha \tag{2}$$

i

$$a^2 = D^2 + D^2 - 2D^2\cos\alpha. \tag{3}$$

Uvrštavanjem (1) u (2) i (3) imamo:

$$a^3 = aD^2 + ad^2 - d^2D \tag{4}$$

i

$$a^3 = 2aD^2 - dD^2. \tag{5}$$

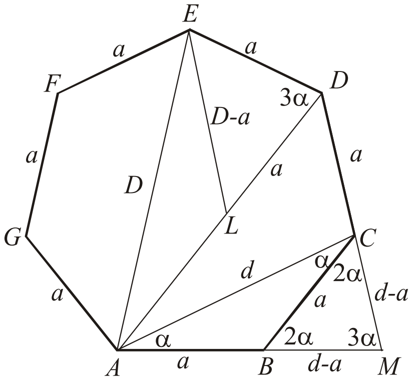
Iz jednakosti (4) i (5) proizilazi

$$aD^2 + ad^2 - d^2D = 2aD^2 - dD^2$$

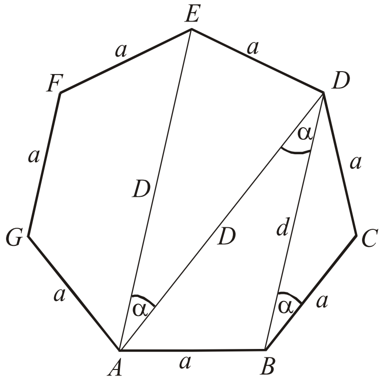
ili

$$Dd(D - d) = a\left(D^2 - d^2\right).$$

Iz posljednje jednakosti, zbog $D^2 - d^2 = (D - d)(D + d)$ i $D - d \neq 0$ sledi tražena relacija ($*$).



sl.3



sl.4

Dokaz 5. Koristit ćemo sledeću lemu (pomoćnu teoremu): Ako je u trouglu ΔABC $\alpha = 2\beta$, onda je $a^2 = b(b+c)$.

Dokaz leme. Neka poluprava Bp, paralelna sa simetralom ugla α, seče pravu AC u tački D (sl.5). Tražena jednakost sledi direktno iz sličnosti trouglova ΔABC i ΔBDC.

Napomena 1. Dokaz leme se može izvesti i pomoću Pitagorine teoreme (v. [3]).

Na osnovu dokazane leme primenjene dva puta na trougao ΔACD (sl.1) je

$$D^2 = d(d+a) \text{ i } d^2 = a(a+D), \text{ tj.}$$
$$D^2 - d^2 = ad \text{ i } d^2 - a^2 = aD.$$

Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo

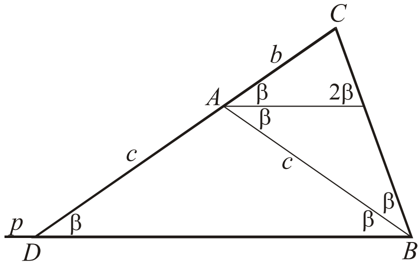
$$D^2 - a^2 = a(D+d). \tag{6}$$

Na dijagonali AD odredimo tačku N tako da $AN = d$, pa je $DN = D - d$ (sl.6). Potom odredimo tačku K, kao kod dokaza 1. Trouglovi ΔABK i ΔCDN su podudarni (pravilo SUS), pa je $CN = AK = d - a$. Primenom navedene leme na trougao ΔCDN imamo

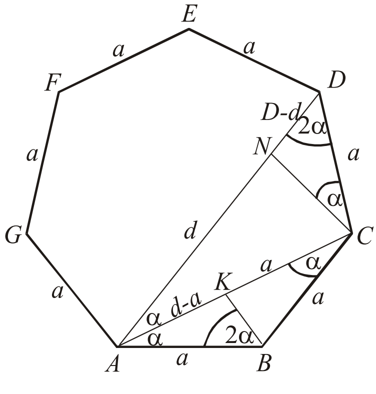
$$(d-a)^2 = (D-d)(D-d+a), \text{ tj.}$$
$$D^2 - a^2 = 2Dd - a(D+d). \tag{7}$$

Iz (6) i (7) sledi

$$a(D+d) = 2Dd - a(D+d), \text{ tj. } Dd = a(D+d).$$



sl.5



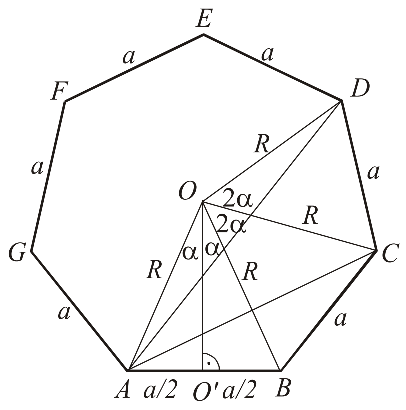
sl.6

Dokaz 6. S obzirom da je $a = 2R\sin\alpha,\ d = 2R\sin 2\alpha$ i $D = 2R\sin 3\alpha$ (sl.7), jednakost ($*$) ekvivalentna je sa

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha},$$

tj. sa

$$sin\,2\alpha\,sin\,3\alpha = sin\,\alpha\left(sin\,2\alpha + sin\,3\alpha\right). \tag{8}$$



sl.7

Kako je

$$sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha \quad \text{i}$$

$$cos\,\alpha\,sin\,3\alpha = \frac{1}{2}\left(sin\left(3\alpha+\alpha\right)+sin\left(3\alpha-\alpha\right)\right) = \frac{1}{2}\left(sin\,4\alpha + sin\,2\alpha\right)$$

,

jednakost (8) se pretvara u

$$sin\,4\alpha - sin\,3\alpha = 0,$$

odnosno u

$$2\,sin\frac{4\alpha-3\alpha}{2}cos\frac{4\alpha+3\alpha}{2} = 0,$$

tj. u

$$2\,sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{7\alpha}{2} = 0. \tag{9}$$

Kako je $\frac{7\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$ i $cos\frac{\pi}{2} = 0$, jednakost (9) je tačna, a samim tim je tačna jednakost (8), odnosno jednakost ($*$).

Dokaz 7. Koristićemo Molvajdovu formulu

$$\frac{a+b}{2} = \frac{cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{sin\frac{\gamma}{2}},$$

gdje su a,b,c stranice i α,β,γ unutrašnji uglovi trougla ΔABC. Primenom ove formule na trougao ΔACF, imamo

$$\frac{D+d}{d} = \frac{cos\frac{3\alpha-2\alpha}{2}}{sin\frac{2\alpha}{2}} = \frac{cos\frac{\alpha}{2}}{sin\,\alpha}. \tag{10}$$

Na osnovu sinusne teoreme primenjene na trougao ΔAMC (sl.3), dobijamo

$$\frac{d-a}{sin\,\alpha} = \frac{d}{sin\,3\alpha}, \text{ tj.}$$

$$\frac{d-a}{d} = \frac{sin\,\alpha}{sin\,3\alpha}. \tag{11}$$

S obzirom da je $sin\,3\alpha = sin\left(\frac{7\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = cos\frac{\alpha}{2}$, za $\alpha = \frac{\pi}{7}$, tada je

$$\frac{cos\frac{\alpha}{2}}{sin\,\alpha} \cdot \frac{sin\,\alpha}{sin\,3\alpha} = 1,$$

pa iz jednakosti (10) i (11) sledi

$$\frac{D+d}{d} \cdot \frac{d-a}{d} = 1,$$

što je ekvivalentno sa ($*$).

Dokaz 8. Primenom Ptolemejeve teoreme na tetivni četverougao $ACDE$ (sl.3) imamo $AD \cdot CE = AE \cdot CD + AC \cdot DE$, odnosno

$$D \cdot d = D \cdot a + d \cdot a$$

odakle sledi ($*$).

Napomena 2. Jednakost ($*$) može se dokazati i primenom kompleksnih brojeva (v. [4]).

LITERATURA

[1] V. Blagojević, *Teoreme i zadaci iz planimetrije*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, I. Sarajevo, 2002.

[2] Đ. Dugošija, Ž. Ivanović, L. Milin, *Trigonometrija (udžebnik sa zbirkom zadataka za II razred Matematičke gimnazije)*, Krug, Beograd, 1999.

[3] D. Milošević, B. Simić, *Matematičke zanimljivosti*, Dečje novine DOSITEJ, Gornji Milanovac, 2011.

[4] www.srb.imomath.com/dodatne/kamp/sabac_8.pdf