MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (p)**
XVII (1) (2011), 5-11 **ISSN 1986-5228 (o)**
Metodika matematike

JEDNO POBOLJŠANJE NESBITTOVE NEJEDNAKOSTI I NEKE NJENE GENERALIZACIJE

Dr. Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

Sažetak: U radu je dokazano jedno poboljšanje Nesbitove nejednakosti a zatim dvije generalizacije te nejdnakosi.

Abstract: In this paper we show an improvement of Nesbitt's inequality.

Math.Subj.Classification (2010): 97F50
ZDM Subj.Classification (2010): F50, N50

U matematičkoj literaturi nejednakost oblika

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2};\ \left(a,b,c>0\right) \tag{1}$$

je poznata kao **Nesbittova nejednakost**. Naime, nju je matematičar A.M.Nesbitt postavio 1903. godine kao Problem 15144 u časopisu Educational Times, 3 (1903), 37-38. Čitav istorijat ove nejednakosti te pokušaj njene generalizacije dat je u [1] i nešto opširnije u [4]. Recimo i to da se u [1] nalazi deset raznih dokaza nejednakosti (1), a u [2] još jedanaest njenih dokaza. Uočavamo da je ova nejednakost ciklička, simetrična i homogena. Za njene dokaze u [1] i [2] smo koristili nejednakosti između brojnih sredina, nejednakost Koši-Bunjakovski-Švarca, te nejednakost Jensena, Čebiševa, Myurheada i još neke.
U ovom radu ćemo najprije dokazati bolju (jaču) nejednakost od nejednakosti (1), a koja glasi:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{a+b}{a+b+2c}+\frac{b+c}{b+c+2a}+\frac{c+a}{c+a+2b}\geq\frac{3}{2}, \tag{2}$$

gdje su $a,b,c>0$.

Dokaz:
1^0 Najprije ćemo dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{a+b}{a+b+2c}+\frac{b+c}{b+c+2a}+\frac{c+a}{c+a+2b}. \tag{3}$$

Imamo

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)\geq\frac{a+b}{a+b+2c} \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a(c+a)+b(b+c)}{2(b+c)(c+a)}\geq\frac{a+b}{a+b+2c}$$

$$\Leftrightarrow\left[a(c+a)+b(b+c)\right](a+b+2c)\geq 2(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow\left(ac+a^2+b^2+bc\right)(a+b+2c)\geq 2\left(ab+b^2+ac+bc\right)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a^2c+a^3+ab^2+abc+abc+a^2b+b^3+b^2c+2ac^2+2a^2c+2b^2c+2bc^2\geq$$

$$\geq 2abc+2b^2c+2ac^2+2bc^2+2a^2b+2ab^2+2a^2c+2abc$$

$$\Leftrightarrow a^3+a^2c-ab^2-2abc-a^2b+b^3+b^2c\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3-2a^2b+ab^2+a^2b-2ab^2+b^3+a^2c-2abc+b^2c\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(a^2-2ab+b^2\right)+b\left(a^2-2ab+b^2\right)+c\left(a^2-2ab+b^2\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b+c)\geq 0,$$

što je tačno. Dakle, nejednakost (4) je tačno. Analogno dobijamo još dvije nejednakosti:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{b+c}{b+c+2a} \tag{5}$$

i

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)\geq\frac{a+c}{a+c+2b}. \tag{6}$$

Nakon sabiranja nejednakosti (4), (5) i (6), dobijamo nejednakost (3).
Vrijedi jednakost u (3) ako i samo ako je $a=b=c$.

2^0 Sada ćemo dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{a+b}{a+b+2c}+\frac{b+c}{b+c+2a}+\frac{c+a}{c+a+2b}\geq\frac{3}{2}. \tag{7}$$

Dokaz: Označimo lijevu stranu nejednakosti (7) sa L; imamo:

$$L=\frac{a+b}{a+b+2c}+\frac{b+c}{b+c+2a}+\frac{c+a}{c+a+2b}=\frac{a+b}{a+b+2c}+1+\frac{b+c}{b+c+2a}+1+\frac{c+a}{c+a+2b}+1-3=$$

$$=\frac{2(a+b+c)}{a+b+2c}+\frac{2(a+b+c)}{b+c+2a}+\frac{2(a+b+c)}{c+a+2b}-3=$$

$$=2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b+2c}+\frac{1}{b+c+2a}+\frac{1}{c+a+2b}\right)-3,$$

a odavde zbog nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine tri pozitivna broja:

$$L\geq 2(a+b+c)\cdot\frac{9}{\frac{1}{\frac{1}{a+b+2c}}+\frac{1}{\frac{1}{b+c+2a}}+\frac{1}{\frac{1}{c+a+2b}}}-3$$

$$=2(a+b+c)\cdot\frac{9}{4(a+b+c)}-3$$

$$=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}, \text{ tj.}$$

$$L\geq\frac{3}{2}. \qquad \text{q.e.d.}$$

Dakle, nejednakost (7) je tačna.
Sada iz 1^0 i 2^0, tj. nejednakosti (3) i (7) slijedi nejednakost (2). Vrijedi jednakost u (7), odnosno u (2) ako i samo ako je $a=b=c$.

Sada ćemo dokazati dvije teoreme koje na izvjestan način predstavljaju generalizacije Nesbittove nejednakosti (1).

Teorema 1. Neka su a,b,c,k pozitivni realni brojevi. Tada je

$$\frac{a}{kb+c}+\frac{b}{kc+a}+\frac{c}{ka+b}\geq\frac{3}{1+k}. \qquad (8)$$

Dokaz: Koristit ćemo nejednakost Koši-Bunjakovski-Švarca za $n=3$, tj.

$$\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right)^2\leq\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right), \qquad (9)$$

gdje su $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$.
Stavljajući u (9) da je

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{kab+ac}},\ x_2 = \frac{b}{\sqrt{kbc+ab}},\ x_3 = \frac{c}{\sqrt{kac+bc}},\ y_1 = \sqrt{kab+ac},\ y_2 = \sqrt{kbc+ab},\ y_3 = \sqrt{kac+bc},$$

dobijamo:

$$(a+b+c)^2 \le \left(\frac{a^2}{kab+ac} + \frac{b^2}{kbc+ab} + \frac{c^2}{kac+bc}\right)\cdot\left(kab+ac+kbc+ab+kac+bc\right),$$

a odavde

$$\frac{a}{kb+c} + \frac{b}{kc+a} + \frac{c}{ka+b} \ge \frac{(a+b+c)^2}{(1+k)(ab+bc+ca)}. \qquad (10)$$

Kako je

$$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$$

$$\left(\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \ge 0\right), \text{ tj.}$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \ge 3,$$

to iz nejednakosti (10) dobijamo:

$$\frac{a}{kb+c} + \frac{b}{kc+a} + \frac{c}{ka+b} \ge \frac{3}{1+k}, \text{ q.e.d.}$$

Vrijedi jednakost u (8) ako i samo ako je $a = b = c$. Ovim je Teorema 1. dokazana. Za $k = 1$ iz nejednakosti (8) dobijamo nejednakost (1).

Napomena 1: Na sličan način se dokazuje da važi opštija nejednakost od nejednakosti (8) koja glasi:

$$\frac{a}{kb+rc} + \frac{b}{kc+ra} + \frac{c}{ka+rb} \ge \frac{3}{k+r}, \qquad (8')$$

gdje su $a, b, c, k, r > 0$.

Dokaz: Uzimajući u nejednkaosti Koši-Bunjakovski-Švarca (9) da je:

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{kab+rac}},\ x_2 = \frac{b}{\sqrt{kbc+rba}},\ x_3 = \frac{c}{\sqrt{kac+rbc}},$$

$$y_1 = \sqrt{kab+rac},\ y_2 = \sqrt{kbc+rba},\ y_3 = \sqrt{kac+rbc},$$

dobijamo:

$$(a+b+c)^2 \le \left(\frac{a^2}{a(kb+rc)} + \frac{b^2}{b(kc+ra)} + \frac{c^2}{c(ka+rb)}\right)\cdot\left(kab+rac+kbc+rba+kac+rbc\right),$$

a odavde

$$\frac{a}{kb+rc} + \frac{b}{kc+ra} + \frac{c}{ka+rb} \ge \frac{(a+b+c)^2}{(k+r)(ab+bc+ca)}.$$

Kako je $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$, tj.

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \ge 3,$$

to imamo da je:

$$\frac{(a+b+c)^2}{(k+r)(ab+bc+ca)} \ge \frac{3}{k+r},$$

odnosno

$$\frac{a}{kb+rc} + \frac{b}{kc+ra} + \frac{c}{ka+rb} \ge \frac{3}{k+r}, \text{ q.e.d.}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$. Za $k=r=1$ iz ove nejednakosti dobijamo nejednakost (1).

Teorema 2. Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitivni realni brojevi i $n \ge 2$ prirodan broj. Tada je

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+...+x_n} + \frac{x_2}{x_1+x_3+...+x_n} + ... + \frac{x_n}{x_1+x_2+...+x_{n-1}} \ge \frac{n}{n-1}. \quad (11)$$

Dokaz 1: Neka je $S = x_1 + x_2 + ... + x_n$; sada imamo:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+...+x_n} + \frac{x_2}{x_1+x_3+...+x_n} + ... + \frac{x_n}{x_1+x_2+...+x_{n-1}} = \frac{x_1}{S-x_1} + \frac{x_2}{S-x_2} + ... + \frac{x_n}{S-x_n}.$$

Nejednakost (11) je simetrična te ne umanjujući općenitost možemo pretpostaviti da je $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$; tada je

$$S - x_1 \leq S - x_2 \leq \ldots \leq S - x_n \text{, te}$$

$$\frac{x_1}{S - x_1} \geq \frac{x_2}{S - x_2} \geq \ldots \geq \frac{x_n}{S - x_n} .$$

Sada na osnovu nejednakosti Čebiševa imamo:

$$\frac{x_1}{S - x_1}\left(S - x_1\right) + \frac{x_2}{S - x_2}\left(S - x_2\right) + \ldots + \frac{x_n}{S - x_n}\left(S - x_n\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{S - x_1} + \frac{x_2}{S - x_2} + \ldots + \frac{x_n}{S - x_n}\right)\left[\left(S - x_1\right) + \left(S - x_2\right) + \ldots + \left(S - x_n\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{S - x_1} + \frac{x_2}{S - x_2} + \ldots + \frac{x_n}{S - x_n}\right) \cdot \left(n - 1\right)S \ ,$$

a odavde zbog $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$:

$$\frac{x_1}{S - x_1} + \frac{x_2}{S - x_2} + \ldots + \ldots \frac{x_n}{S - x_n} \geq \frac{n}{n - 1} \text{, q.e.d.}$$

Jednakost u (11) vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Za $n = 3$ iz nejednakosti (11) dobijamo nejednakost (1).

Dokaz 2: Uvedimo smjenu:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= \left(n - 1\right)A_1 , \\ x_1 + x_3 + \ldots + x_n &= \left(n - 1\right)A_2 , \\ &\vdots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} &= \left(n - 1\right)A_n . \end{aligned}$$

Nakon sabiranja ovih jednakosti dobijamo:

$$\left(n - 1\right)\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) = \left(n - 1\right)\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right) ,$$

a odavde

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(2 - n\right)A_1 + A_2 + \ldots + A_n , \\ x_2 &= A_1 + \left(2 - n\right)A_2 + \ldots + A_n , \\ &\vdots \\ x_n &= A_1 + A_2 + \ldots + \left(2 - n\right)A_n . \end{aligned}$$

Data nejednakost (11) sada postaje:

$$\frac{(2-n)A_1+A_2+...+A_n}{(n-1)A_1}+\frac{A_1+(2-n)A_2+...+A_n}{(n-1)A_2}+...+\frac{A_1+A_2+...+(2-n)A_n}{(n-1)A_n}\geq\frac{n}{n-1},$$

odnosno

$$\frac{(2-n)A_1+A_2+...+A_n}{A_1}+\frac{A_1+(2-n)A_2+...+A_n}{A_2}+...+\frac{A_1+A_2+...+(2-n)A_n}{A_n}\geq n, \text{ tj.}$$

$$(2-n)+\frac{A_2}{A_1}+...+\frac{A_n}{A_1}+\frac{A_1}{A_2}+(2-n)+...+\frac{A_n}{A_2}+...+\frac{A_1}{A_n}+\frac{A_2}{A_n}+...+\frac{A_{n-1}}{A_n}+(2-n)\geq n,$$

a odavde

$$\left(\frac{A_2}{A_1}+\frac{A_3}{A_1}+...+\frac{A_n}{A_1}\right)+\left(\frac{A_1}{A_2}+\frac{A_3}{A_2}+...+\frac{A_n}{A_2}\right)+...+\left(\frac{A_1}{A_n}+...+\frac{A_{n-1}}{A_n}\right)\geq n-n(2-n)=n(n-1),$$

a ova nejednakost je tačna na osnovu nejednakosti $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2;\ \ (a,b>0)$, a ovih nejednakosti ima $2C_n^2=2\binom{n}{2}=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$.

Ovim je nejednakost (11) dokazana.

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

[2] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.

[3] Bencze, M., Arslanagić, Š., *A Mathematical Problem Book*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

[4] D.S. Mitrinović, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[5] F. Wei and Sh. Wu, *Generalizations and analogues of the Nesbitt's inequality*, Octogon Mathematical Magazine, Vol. 17, No. 1, April 2009, pp. 215-220.

Primljeno 22.03.2011.