MAT-KOL (Banja Luka)
XXI (1)(2015), 11--16
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5828 (o)
doiSrpska ...

ŠEST NAČINA ZA RJEŠAVANJE JEDNE ALGEBARSKE NEJEDNAKOSTI

(Six ways to solve of one algebraic inequality)

Dragoljub Milošević[1] i Aleksandra Milićević[2]

Sažetak: U ovom radu dajemo šest dokaza sljedeće nejednakosti

$$\frac{a}{ka+b}+\frac{b}{kb+a}\leq\frac{2}{k+1},$$

gdje su $a,\ b,\ k$ pozitivni realni brojevi i $k\geq 1$.

Ključne riječi: algebarska nejednakost, nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, konkavna funkcija.

Abstract: In this paper we give six proofs of the following inequality

$$\frac{a}{ka+b}+\frac{b}{kb+a}\leq\frac{2}{k+1},$$

where a, b, k be the positive real numbers and $k\geq 1$.

Key words and phrases: algebraic inequality, AM – GM inequality, concave function.

AMS Subject Classification (2010): **97F50**
ZDM Subject Classification (2010): **F50, N50**

Rješavanje zadataka na više načina veoma lijepo ilustruje bogatstvo ideja, dosetki, inventivnosti i dosta doprinosi razvoju kvalitetnog razmišljanja i matematičke intuicije. Ovaj članak smatramo poučnim i korisnim za učenike i studente koji pokazuju veći interes za matematiku kao i nastavnicima koji rade sa ovim učenicima i studentima.

Ovdje dajemo šest dokaza nejednakosti za pozitivne brojeve

[1] 17. NOU divizije 43, 32 300 Gornji Milanovac, Srbija
[2] Kneza Aleksandra Karadjordjevica 4/8, 32 300 Gornji Milanovac, Srbija

$$\frac{a}{ka+b}+\frac{b}{kb+a}\leq\frac{2}{k+1}, \qquad k\geq 1. \tag{1}$$

Dokaz 1. Ako stavimo

$$ka+b=A \text{ i } kb+a=B,$$

poslije sabiranja ovih jednakosti dobijamo $(k+1)(a+b)=A+B$, tj.

$$a+b=\frac{1}{k+1}(A+B).$$

Sada je

$$a=\frac{1}{k^2-1}(\mathrm{A}k-B) \text{ i } b=\frac{1}{k^2-1}(Bk-A), \qquad k\neq 1.$$

Tada imamo

$$\mathrm{M}=\frac{a}{ka+b}+\frac{b}{kb+a}=\frac{1}{k^2-1}\left(2k-\left(\frac{B}{A}+\frac{A}{B}\right)\right).$$

Na osnovu aritmetičko-geometrijske nejednakosti dobijamo

$$\frac{B}{A}+\frac{A}{B}\geq 2\sqrt{\frac{B}{A}\cdot\frac{A}{B}}=2,$$

pa je

$$\mathrm{M}\leq\frac{1}{k^2-1}(2k-2)$$

$$=\frac{2}{k+1}, \quad k>1, \quad \text{tj. važi (1).}$$ [3]

Dokaz 2. Izraz M možemo napisati kao

$$\mathrm{M}=\frac{a^2+\mathrm{b}^2+2kab}{k(a^2+b^2)+(k^2+1)ab}$$

$$=\frac{1}{k}\left(1+\frac{(k^2-1)ab}{k(a^2+b^2)+(k^2+1)ab}\right). \tag{2}$$

[3] Lako se utvrđuje da nejednakost (1) vrijedi i za $k=1$.

S obzirom da je

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ i } k \geq 1,$$

iz (2) slijedi

$$M \leq \frac{1}{k}\left(1 + \frac{(k^2 - 1)ab}{2kab + (k^2 + 1)ab}\right) = \frac{1}{k} \cdot \frac{2k(k+1)}{(k+1)^2}$$

$$= \frac{2}{k+1}.$$

Dokaz 3. Imamo redom:

$$\mathrm{M} = \frac{1}{k+1}\left(\frac{(k+1)a + b - b}{ka + b} + \frac{(k+1)b + a - a}{kb + a}\right)$$

$$= \frac{1}{k+1}\left(2 + (a - b)\left(\frac{1}{ka + b} - \frac{1}{kb + a}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{k+1}\left(2 + \frac{(a - b)^2(1 - k)}{(ka + b)(kb + a)}\right). \tag{3}$$

S obzirom da je $k \geq 1$, iz (3) proizlazi

$$\mathrm{M} \leq \frac{1}{\mathrm{k} + 1}(2 - 0) = \frac{2}{\mathrm{k} + 1}.$$

Dokaz 4. Nejednakost (1) je ekvivalentna sa

$$\frac{1}{k + \frac{b}{a}} + \frac{1}{k + \frac{a}{b}} \leq \frac{2}{k+1}, k \geq 1. \tag{4}$$

Ako u (4) stavimo

$$\frac{b}{a} = x \text{ i } \frac{a}{b} = y,$$

dobijamo

$$xy = 1 \text{ i } \frac{1}{k + x} + \frac{1}{k + y} \leq \frac{2}{k + 1} \Leftrightarrow \frac{2k + x + y}{k^2 + k(x + y) + 1} \leq \frac{2}{k + 1}$$

$$\Leftrightarrow (k+1)(2k+x+y) \le 2(k^2+kx+ky+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(k-1) \le (k-1)(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \ x+y \ge 2, \text{ jer je } k \ge 1.$$

Posljednja nejednakost je tačna zbog $x+y \ge 2\sqrt{xy}$ i $xy = 1$.

Dokaz 5. Postavljena nejednakost je ekvivalentna sa

$$\frac{ka+b-b}{ka+b} + \frac{kb+a-a}{kb+a} \le \frac{2k}{k+1},$$

tj. sa

$$\frac{a}{kb+a} + \frac{b}{ka+b} \ge \frac{2}{k+1}, k \ge 1. \tag{5}$$

Na osnovu AG nejednakosti, je

$$\frac{y}{x}a^2 + \frac{x}{y}b^2 \ge 2\sqrt{\frac{y}{x}a^2 \cdot \frac{x}{y}b^2}$$

$$= 2ab, \quad (a, b, x, y > 0).$$

Dodavanjem obema stranama ove nejednakosti po $a^2 + b^2$ dobijamo

$$\frac{x+y}{x}a^2 + \frac{y+x}{y}b^2 \ge 2ab + a^2 + b^2 \Leftrightarrow (x+y)\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right) \ge (a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \ge \frac{(a+b)^2}{x+y}. \tag{6}$$

Ako u (6) stavimo

$$x = a(kb+a) \text{ i } y = b(ka+b),$$

dobijamo

$$\frac{a}{kb+a} + \frac{b}{ka+b} = \frac{a^2}{a(kb+a)} + \frac{b^2}{b(ka+b)} \ge \frac{(a+b)^2}{2kab+a^2+b^2}$$

$$= \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2 + 2(k-1)ab}. \quad (7)$$

Kako je tačno

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow 2ab \leq \frac{(a+b)^2}{2},$$

iz (7) slijedi

$$\frac{a}{kb+a} + \frac{b}{ka+b} \geq \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2 + \frac{k-1}{2}(a+b)^2}$$

$$= \frac{2}{k+1}, k \geq 1.$$

Ovim je dokazana nejednakost (5), a samim tim i tražena nejednakost (1).

Dokaz 6. Posmatrajmo funkciju koja glasi

$$f(x) = \frac{x}{m + (k-1)x}, \quad m = a + b \text{ i } k \geq 1.$$

Njen drugi izvod je

$$f''(x) = \frac{2(1-k)m}{(m + (k-1)x)^3}.$$

Za $k \geq 1$ je $f''(x) \leq 0$, pa je funkcija f konkavna. Zbog toga, imamo

$$f(x_1) + f(x_2) = \frac{x_1}{m+(k-1)x_1} + \frac{x_2}{m+(k-1)x_2} \leq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

$$= \frac{2(x_1+x_2)}{2m + (k-1)(x_1+x_2)}. \quad (8)$$

Ako u (8) stavimo

$$m = a + b, \quad x_1 = a \text{ i } x_2 = b,$$

dobijamo željenu nejednakost (1).

Napomena. Korištenjem ideje iz dokaza 3 možemo lako ustanoviti da vrijedi sledeća nejednakost

$$\frac{a}{ka+b}+\frac{b}{kb+a}\geq\frac{2}{k+1}, \qquad \text{za } 0<k\leq 1.$$

LITERATURA

[1] D. S. Mitrinović, *Analitičke nejednakosti,* Građevinska knjiga, Beograd, 1970.