MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5228 (o)
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
Vol. XXI (1)(2015), 17-31

Matematičke metode 3D grafike, I[1]

buss2005buss2005buss2005buss2005buss2005buss2005
Ilija Lalović[2], **Danijel Vidović**[3]

Apstrakt

U radu se daje prikaz matematičkih metoda računarske grafike. Izlaganje se ilustruje primjerima bliskim praksi 3D grafike.

Abstract

The paper makes of review of mathematical methods of computer graphics. The review is illustrated by examples of 3D graphics.

Categories and Subject Descriptors (according to ACM CCS): I.3.5 **[Computer Graphics]** Computational Geometry and Object Modeling; I.3.7 **[Computer Graphics]** Three-Dimensional Graphics and Realism

General terms: Mathematical foundation of 3D graphics

Key words and phrases: Coordinate systems, vector algebra, interpolation and approximation, matrices and geometric transformations, numerical linear algebra and equations solving, curves and surfaces, splines

1 Uvod

Programeri koji rade u oblasti računarske grafike ili koriste programske pakete računarske grafike imaju potrebe za solidnim poznavanjem matematike, inače će biti prinudjeni rješavati iskrsle matematicke probleme *ad hock,* koristeći svoj matematički talenat u zavisnosti od problema koji rješavaju. Oni vjerovatno nemaju intencije da postanu matematičari, ali ipak moraju izučiti potrebne matematičke discipline i naučiti se da ih racionalno primjenjuju. Za potrebe takvih pogramera je i napisan ovaj pregled.

Koncepcije koje predstavljaju matematički simboli omogućuju rješavanje krajnje kompleksnih problema. Sami simboli, bez razumijevanja koncepcije koja stoji iza njih, nemaju mnogo smisla. U ovom konciznom preledu matematičkih osnova računarske grafike opisane su koncepcije datih matematičkih pojmova dovoljno detaljno da mogu biti primijenjene u praksi.

U domaćoj literaturi ima malo tekstova o vezama izmedju koncepta prostora u sintetičkoj geometriji, linearnoj algebri i algebri geometrije. Zbog toga smo

[1] Rad je nastao proširenjem dijela diplomskog rada [12]

[2] Prirodno-matematički fakultet, Mladena Stojanovića 2, 78000 Banja Luka, e-mail: ilalovich@yahoo.com

[3] SŠC "Jovan Dučić", 74270 Teslić, e-mail: danijel.vidovic@gmail.com

ovu temu obradili nešto detaljnije u sekciji o afinim i projektivnim prostorima. Kompletnije izlaganje se može naći u knjizi [4].

U pregledu je malo originalnog sadržaja. Aspekti originalnosti uglavnom se tiču organizacije i prikaza materijala. Čitalac zainteresovan za konkretne primjere primjena opisanih koncepcija lako će ih naći u navedenoj literaturi ili u nastavku ovog rada koji je u pripremi.

Detaljnija izlaganja o koordinatnim sistemima, vektorskoj algebri, matricama i geometrijskim transformacijama mogu se naći u [6, 6a]; o numeričkoj linearnoj algebri i rješavanju jednačina u [2]; o diferencijalnoj geometriji u [6]; o interpolaciji i aproksimaciji u [2, 9]; o modelovanju krivih i površi u [7]; o splajnovima u [9]. Sve ove teme su prikazane i u knjigama [1,3, 4, 8, 10], a pri tome su izlaganja ilustrovana uglavnom primjerima iz računarske grafike.

Iako su veb stranice nepostojane, u prikazu se ipak navode reference [14, 15, 16, 17], sa nadom da će značajni sadržaji iz matematičkih osnova računarske grafike na ovim veb stranicama biti sačuvani duže vremena.

2 Afina i projektivna geometrija

U knjizi "Elementi" Euklid je dao aksiomatsko zasnivanje euklidske geometrije. Njegovi "Elementi" su korišteni više od dvije hiljade godina, a po njegovom imenu nazvan je Euklidov prostor, koji se i danas izučava u linearnoj algebri.

U sedamnaestom vijeku je francuski filozof i matematičar R. Deckartes objavio knjigu La Geometrie u kojoj je skicirao današnju analitičku geometriju. Ideja analitičke geometrije je jednostavna. Svakoj tački Euklidove ravni može se pridružiti par brojeva na takav način da je svaka prava predstavljena linearnom jednačinom, a krugovi i konusni presjeci su predstavljeni kvadratnom jednačinom.

Godine 1899. David Hilbert je objavio čuvenu knjigu Grundlagen der Geometrie sa ciljem da sintetičku geometriju izloži na logički strog način. Hilbert je uzeo dvadeset aksioma, podijeljenih u pet grupa: aksiome incidencije (pripadnost tačaka pravim, pripadnost pravih ravnima, itd.), aksiomu paralelnosti, aksiome poretka (odredjuju relaciju "biti izmedju" na pravim) aksiome kongruencije (uvode mjeru u geometriju), te aksiome neprekidnosti (odredjuju topologiju Euklidove geometrije). Hilbert je uveo brojeve kao koordinate u njegovoj geometriji i dao je algebarsku interpretaciju geometrijskih aksioma. Ova Hilbertova koordinatizacija premošćuje jaz izmedju Euklidove i Dekartove geometrije.

U ovoj sekciji ćemo razmotriti afine i projektivne prostore. Pokazaćemo sintetičku i algebarsku definiciju afinih prostora i njihovu vezu. Zatim ćemo vidjeti kako se u ove prostore uvode koordinate i kako se dolazi do pojma vektorskog prostora.

2.1 Afina i projektivna ravan

U afinoj geometriji važe aksiome incidencije i paralelnosti, ali nema pojma podudarnosti, mjere, relacije biti izmedju i slično. Tako u afinoj geometriji nemamo mjere uglova ili duži, a takodje nemamo figure kao što su istostranični ili ravnokraki trougao. U afinoj geometriji radimo sa pravim, trouglovima i paralelogramima i uopšte sa afinim mnogostrukostima. Dalje nam je cilj da uvedemo koordinate u afini prostor i prikažemo vezu sa odgovarajućim algebarskim sistemima.

Afina ravan je uredjen par $\langle \mathcal{P}, \mathcal{L} \rangle$, gdje je $\mathcal{P}$ neprazan skup tačaka, a $\mathcal{L}$ je neprazna familija podskupova od $\mathcal{P}$ koje nazivamo prave i koje imaju sljedeća svojstva:

$A1$. Ako su P i Q dvije različite tačke, tada postoji jedinstvena prava $l(P, Q)$ koja ih sadrži.

$A2$. Ako tačka P ne pripada pravoj l, tada postoji jedinstvena prava m takva da je $P \in m$ i $l \cap m = \emptyset$. (Ako je $l \cap m = \emptyset$, tada kažemo da su prave l i m paralelne i pišemo $l \parallel m$).

$A3$. Postoje najmanje dvije tačke na svakoj pravoj. Postoje najmanje dvije prave.

Primjer 2.1 *Najmanja afina ravan se sastoji od četiri tačke i šest pravih. Sintaksno može biti opisana sa*

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$$

$$\mathcal{L} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$$

Trivijalno se provjerava da su aksiome afine ravni zadovoljene. □

Ako stavimo $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 0)$ i $D = (1, 1)$, onda smo napravili koordinatizaciju afine ravni iz primjera 2.1 nad poljem $\mathbb{Z}_2$.

Slično se može konstruisati afina ravan nad $\mathbb{Z}_3$, sa devet tačaka i dvanaest pravih.

Još uvijek nije riješen problem za koje $n \in \mathbb{N}$ postoje konačne afine ravni koje sadrže n tačaka.

Primjer 2.2 *Realnu afinu ravan sa koordinatama definišemo sa*

$$\mathcal{P} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

i

$$l \in \mathcal{L} \text{ ako i samo ako } l = \{(x, y) | ax + by = c\},$$

gdje je $a, b, c \in \mathbb{R}$ *i* $a^2 + b^2 \neq 0$. □

Primjer 2.3 *Racionalnu afinu ravan sa koordinatama definišemo sa*

$$\mathcal{P} = \mathbb{Q}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Q}\}$$

i

$$l \in \mathcal{L} \text{ ako i samo ako } l = \{(x,y) | ax + by = c\},$$

gdje je $a, b, c \in \mathbb{Q}$ *i* $a^2 + b^2 \neq 0$. $\square$

Neprotivrječnost i nezavisnost aksioma afine ravni dokazuju se konstruisanjem odgovarajućih modela. Na primjer, projektivna ravan G. Fano zadovoljava $A1$ i $A3$, ali ne i $A2$ aksiome.

Sa otkrićem nezavisnosti Euklidovog petog postulata, u devetnaestom vijeku je porastao interes za geometrije u kojima aksioma paralelnosti ne važi. Jedan od glavnih interesa geometrije u tom periodu bila je projektivna geometrija u kojoj nema paralelnih pravih. Iako je afina geometrija bliža intuiciji, projektivna geometrija je, u odredjenom smislu, prihvatljivija u matematici od afine geometrije. Često se nekoliko teorema afine geometrije svode na jednu teoremu projektivne geometrije. Dodatno, postoji dualnost u projektivnoj geometriji, koja znači da za svaku teoremu projektivne geometrije, postoji dualna teorema koja se dokazuje automatski.

Projektivna ravan je uredjen par $(\mathcal{P}', \mathcal{L}')$, pri čemu je $\mathcal{P}'$ neprazan skup elemenata koje zovemo *tačke*, a $\mathcal{L}'$ je kolekcija podskupova skupa $\mathcal{P}'$ koje zovemo *prave* i koje zadovoljavaju sljedeće aksiome:

P1. Ako su P i Q različite tačke, tada postoji jedinstvena prava $l'(P,Q)$ tako da je $P \in l'$ i $Q \in l'$.

P2. Ako su l' i m' različite prave u $\mathcal{L}'$, tada je $l' \cap m' \neq \emptyset$.

P3. Postoje najmanje tri tačke na svakoj pravoj. Postoje najmanje dvije različite prave.

Primjer 2.4 Realna projektivna ravan *Neka je* $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Definišemo relaciju ekvivalencije* $\sim$ *nad elementima* $\mathbb{R}^3$ *tako da je* $(x,y,z) \sim (x',y',z')$ *ako i samo ako postoji* $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, *tako da je* $(x',y',z') = r(x,y,z)$.

Neka je $\mathcal{P}'$ *skup klasa ekvivalencije elemenata* $\mathbb{R}^3$. *Označimo klasu ekvivalencije u kojoj je* (p,q,r) *sa* $\langle p,q,r \rangle$. *Brojevi* p, q, r *nazivaju se* **homogene koordinate** *tačke* $< p,q,r >$. *Jasno je da se jedna klasa ekvivalencije sastoji od tačaka različitih od nule na nekoj pravoj kroz početak* $\mathbb{R}^3$.

Definišemo skup pravih $\mathcal{L}' \ni l'$ *pri čemu je prava* l' *skup svih tačaka* $< x,y,z >$ *koje zadovoljavaju homogenu linearnu jednačinu oblika*

$$ax + by + cz = 0$$

U $\mathbb{R}^3$ *je to jednačina ravni kroz tačku* $(0,0,0)$.

Trivijalno se provjerava da $(\mathcal{P}', \mathcal{L}')$ *zadovoljava aksiome projektivne ravni.*

Lako se može pokazati da svaka afina ravan može biti proširena do neke projektivne ravni dodavanjem jedne zajedničke tačke svakom skupu paralelnih pravih i spajanjem novih tačaka tako da čine jednu dodatnu pravu.

Ako u nekoj tvrdnji koja važi u projektivnoj ravni, zamijenimo pojmove "tačka" i "prava" i pojmove "sadrži" i "sadržana u", onda dobivamo *dualnu tvrdnju* projektivne ravni. Aksiome projektivne ravni mogu se formulisati tako da se ne mijenjaju pri zamjeni navedenih pojmova. To znači, da ako u projektivnoj ravni važi neka teorema, onda u toj projektivnoj ravni važi i dualna teorema. Dualnost daje prednosti, jer je moguće da umjesto dvije teoreme afine ravni, treba dokazati samo jednu odgovarajucu teoremu projektivne ravni.

Kolineaciju projektivnih ravni definišemo kao izomorfizam koji čuva kolinearnost tačaka.

2.2 Koordinatizacija afinih i projektivnih ravni

Grčki geometri su uveli pojam "geometrijske algebre" za sabiranje i množenje duži. Sabiranje se izvodi paralelnim pomjeranjem (translacijom), dok množenje koristi proporcionalnost duži.Pretpostavljamo da čitalac poznaje definicije ovih operacija u sintaktičkoj geometriji.

Da bi u afinoj ravni sabiranje bilo asocijativno i komutativno, a dobro definisano množenje asocijativno, treba da je zadovoljena teorema Deezarga. Da bi množenje bilo komutativno treba da je ispunjena teorema Papusa. Teoreme Dezarga i Papusa se formulišu i dokazuju koristeći samo paralelnost, pa zbog toga imaju smisla u afinoj ravni. Formulacija i dokaz ovih teorema pomoću kongruencije i sličnosti nemaju smisla u afinoj ravni. Formulišemo sljedeće dvije teoreme koje daju sintetičku karakterizaciju sabiranja i množenja u afinoj ravni.

Teorema 2.1 *U odnosu na dvije fiksirane tačke O i I svaka prava afine Dezargove ravni je* **prsten sa dijeljenjem**. *Za svaki prsten sa dijeljenjem $\mathbb{D}$ koordinatna ravan $\mathbb{D}^2$ je prsten sa dijeljenjem.*

□

Teorema 2.2 *Papusova teorema važi u Dezargovoj afinoj ravni ako i samo ako je množenje tačaka na pravim te afine ravni komutativno.*

□

Dalje se pokazuje da svaka Dezargova afina ravan može biti posmatrana kao $\mathbb{D}^2$, za neki prsten sa dijeljenjem, preimenovanjem njegovih tačaka u uredjene parove elemenata prstena $\mathbb{D}$ i pridruživanjem linearne jednačine svakoj pravoj. Ako važi Papusova teorema, onda je množenje komutativno, pa se takva afina ravan može smatrati **poljem**. Opisana korespondencija afinih ravni i prstena sa dijeljenjem (ili polja, u slučaju da važi Papusova teorema u toj afinoj ravni) daje nam koordinatizaciju afine ravni.

Svako polje je i prsten sa dijeljenjem. Teorema J. C. M. Wedderburn-a (1882-1948) kaže da je svaki konačan prsten sa dijeljenjem polje. Zbog toga primjer nekomutativnog prstena sa dijeljenjem treba tražiti medju beskonačnim prstenima sa dijeljenjem. Jedan takav prsten sa dijeljenjem predstavljaju kvaternioni, to jest skup $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Kvaternioni ne čine polje, jer je $ij \neq ji$. Afina ravan nad $\mathbb{H}$ je prsten sa dijeljenjem, ali nije polje.

Nakon što smo uveli koordinatizaciju afinih ravni, možemo definisati vektorske prostore. Vektorski prostori se mogu definisati i nad prstenom sa dijeljenjem i nad poljem. U slučaju da definišemo vektorski prostor nad prstenom sa dijeljenjem treba voditi računa sa koje strane se vrši množenje skalarom što daje lijeve i desne vektorske prostore.

U primjeru 2.4 *realna projektivna ravan* je definisana tako da se sastojala od klasa ekvivalencije tordimenzionalnih vektora kao njenih tačaka i pravih koje zadovoljavaju linearne homogene jednačine. Svaka Dessargues-ova projektivna ravan može biti predstavljena na ovaj način, ali će umjesto realnih brojeva biti korišteni proizvoljni prsteni sa dijeljenjem.

Svaka projektivna tačka odredjena je vektorom $(p, q, r) \neq 0$ i sadrži sve lijeve umnoške od (p, q, r). Slično, svaka homogena linearna jednačina $xa + yb + zc = 0$ je odredjena vektorom $(a, b, c) \neq 0$ i ekvivalentna je svim jednačinama odredjenim desnim umnošscima (am, bm, cm) sa $m \neq 0$. Dakle, postoji dualnost izmedju projektivnih tačaka i ekvivalentnih jednačina koja reverzira lijevo i desno množenje.

Projektivne tačke u $\mathbb{D}^3$ mogu biti opisane sa $\{(p, q, 1) | p, q \in \mathbb{D}\} \cup \{(p, 1, 0) | p \in \mathbb{D}\} \cup \{(1, 0, 0)\}$. Svaka homogena jednačina je ekvivalentna sa tačno jednom jednačinom oblika $x + yb + cz = 0$, $y + zc = 0$, ili $z = 0$.

Sa tačkama kao klasama ekvivalencije i pravim kao skupovima tačaka koje zadovoljavaju homogene linearne jednačine, dobivamo projektivnu ravan. Obrnuto, svaka Dezargova projektivna ravan može se koordinatizovati na ovaj način.

Ravni koje nisu Dezargove, takodje mogu biti koordinatizovane, ali dobiveni koordinatni sistemi nisu jedinstveni već zavise od izbora početne tačke i prave u beskonačnosti. Takodje postoje razne metode za koordinatizaciju ravni koje nisu Dezargove.

2.3 Višedimenzionalni afini i projektivni prostori

Definicija 2.1 Afini prostor *$\mathcal{A}$ je uredjena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{E})$, gdje je $\mathcal{A}$ neprazan skup elemenata koje zovemo tačke, a $\mathcal{L}$ i $\mathcal{E}$ su kolekcije tačaka koje zovemo prave i ravni, respektivno, a zadovoljavaju sljedeće aksiome:*

AR1. Za svake dvije različite tačke P i Q postoji jedinstvena prava $l(P, Q)$ koja ih sadrži.

AR2. Ako su P, Q i R tri nekolinearne tačke, tada postoji jedinstvena ravan $\alpha(P, Q, R)$ koja ih sadrži.

AR3. Ako je tačka P van prave l, tada postoji jedinstvena prava m, koja sadrži tačku P, l i m su u istoj ravni i $l \cap m = \emptyset$.

AR4. Ako je $l \parallel k$, $k \parallel m$, tada je i $l \parallel m$.

Dezargova teorema može biti dokazana u afinom prostoru koji ima više od jedne ravni. Odatle slijedi da u afinom prostoru, koji se ne svodi na jednu ravan, prave mogu da se predstave kao prsten sa dijeljenjem, a ravni onda mogu biti koordinatizovane pojedinačno, kao što je ranije izloženo. Svaka dva prstena sa dijeljenjem, konstruisana nad istim Dezargovim afinim prostorom, su izomorfni.

Za svaki vektorski prostor F^n, nad prstenom sa dijeljenjem $\mathcal{D}$, afini prostor $\mathcal{A}(F^n) = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ se može definisati tako da ima skup tačaka $\mathcal{P} = F^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in F, 0 \leq i \leq n\}$, skup pravih $\mathcal{L} \ni l = \{\mathbf{u} + \mathbf{v}t | \mathbf{u}, \mathbf{v} \in F^n, \mathbf{v} \neq 0, t \in F\}$ i skup ravni $\mathcal{E} \ni \alpha = \{\mathbf{u} + \mathbf{v}t + \mathbf{w}s | \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in F^n, \mathbf{v} \neq 0, \mathbf{w} \neq 0; t, s \in F\}$. Obrnuto, ako u afinom prostoru važi Dezargova teorema, tada se on može koordinatizovati kao prsten sa dijeljenjem.

U radu sa vektorima definišemo rastojanje između dvije tačke, kao dužinu vektora PQ koji spaja tačke P i Q. Ovo je moguće izvesti ako standardni trodimenzionalnalni prostor posjeduje strukturu afinog prostora. To znači da postoji način da se bilo koja tačka P translira za dati vektor v. *R*ezultat translacije zapisujemo sa $P+v$. Pri tome translacija $+$ mora da zadovolji sljedeće uslove:

1. Za svaki vektor v, $P \to P + v$ je injektivna
2. Za svaku tačku P, $P + 0 = P$
3. Za svaku tačku P i vektore v, w, $(P + v) + w = P + (v + w)$

Postojanje vektora PQ koji spaja tačke P i Q je posljedica afinosti. Kao što smo vidjeli, uobičajena kooridinatizacija prostora je takodje posljedica aksioma afinosti. Ako tome još dodamo postojanje skalarnog proizvoda vektora, mogu se definisati pojmovi kao što su udaljenost, uglovi i ortogonalnost, a tada se veliki broj problema iz geometrije može rješiti analitički.

Definicija 2.2 Projektivni prostor *je uredjeni par* $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, *gdje je* $\mathcal{P}$ *neprazan skup čiji se elementi nazivaju tačke,* $\mathcal{L}$ *je neprazna kolekcija podskupova* $\mathcal{P}$ *čijji se elementi nazivaju prave, a zadovoljavaju sljedeće aksiome:*

PR1. Za svake dvije različite tačke P i Q postoji jedinstvena prava $l(P, Q)$ koja ih sadrži.

PR2. (Pašova aksioma) Ako su A, B, C, i D različite tačke, takve da postoji tačka $E \in l(A, B) \cap l(C, D)$, onda postoji i tačka $F \in l(A, C) \cap l(B, D)$.

PR3. Svaka prava sadrži najmanje tri tačke. Nisu sve tačke kolinearne.

Dezargova teorema važi u projektivnim prostorima koji sadrže više od dvije ravni i može se dokazati da se ti prostori mogu koordinatizovati prstenom sa dijeljenjem. Samo u projektivnim ravnima može se desiti da Dezargova teorema ne važi.

Računarski, projektivni prostori nisu vektorski prostori. Takvi prostori nisu dobar algebarski model za računanje na kompjuteru. Šta više ne mogu se dodavati ni tačke u projektivni prostor. Ali, bez neke algebre tačaka nije moguće predstaviti mnoge standardne parametarske krive i površi u gafici, kao što su Bezier i B splajnovi za krive i površi u projektivnom prostoru. Bez pojma sabiranja ili skalarnog proizvoda, projektivni prostori ne mogu podržati algoritme sjenčenja i preslikavanja tekstura zasnovanih na linearnoj interpolaciji. Množenje matrica je moguće u projektivnom prostoru, ali ne može se reći da se množenje matrica prenosi i na sabiranje pošto ne postoji pojam sabiranja tačaka u projektivnom prostoru.

3 Vektorski prostori

3.1 Definicija vektorskog prostora

Neka je K komutativno tijelo. **Vektorskim prostorom** nad K, ili $K-$vektorskim prostorom, naziva se skup V snadbjeven algebarskom strukturom definisanom pomoću dvije operacije:

- jednom unutrašnjom operacijom, koja preslikava $V \times V$ u V, koja se naziva sabiranje
$$(x, y) \mapsto x + y$$
- jednom spoljašnjom operacijom, koja preslikava $K \times V$ u V, koja se naziva množenje
$$(\alpha, x) \mapsto \alpha x, \text{ ili } (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$$

Pri tom ove dvije operacije zadovoljavaju slijedeće uslove:

1. U odnosu na sabiranje, skup V je komutativna grupa, sa neutralnim elementom 0,
2. Za svaki par (α, β) iz K i svaki element x iz V važi
$$\alpha \cdot (\beta x) = (\alpha\beta) \cdot x;$$
$$1.x = x,$$
gdje 1 označava jedinični elemenat tijela K,
3. Za svaki par (α, β) elemenata iz K i svaki par (x, y) elemenata iz V važi
$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x;$$
$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$$

Elementi V nazivaju se vektori, a elementi K nazivaju se skalari.

3.2 Operacije sa vektorima

U računarskoj grafici najčešće se upotrebljava pravougli Dekartov koordinatni sistem. Osnovne operacije u tom sistemu su:

sabiranje $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$,

oduzimanje $(x, y, z) - (x', y', z') = (x - x', y - y', z - z')$,

skaliranje $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$,

skalarni proizvod $(x, y, z) \cdot (x', y', z') = xx' + yy' + zz'$,

norma $\|v\| = \|(x, y, z)\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

vektorski proizvod $(x, y, z) \times (x', y', z') = (zy' - zy', zx' - x'z, xy' - yx')$.

3.3 Geometrijska interpretacija operacija sa vektorima

Ako je φ ugao izmedju dva vektora u i v, tada skalarni proizvod tih vektora možemo zapisati u obliku

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| cos\varphi.$$

Dužina (veličina, norma) vektora v u trodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^3$ se računa pomoću skalarnog proizvoda $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$.

Jedinični vektor, koji ima isti smjer i pravac kao vektor v računa se dijeljenjem vektora njegovom dužinom: $v/\|v\|$.

Projekcija vektora v na jedinični vektor u jednaka je vektoru $(u \cdot v)u$.

Ugao φ izmedju dva vektora u i v računa se po formuli

$$cos\varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}.$$

Rastojanje izmedju dvije tačke $P(x_1, x_2, x_3)$ i $Q = (y_1, y_2, y_3)$, računa se po formuli

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Dva vektora u i v su ortogonalni ako je $u \cdot v = 0$.

Neka dva vektora u, v pripadaju ravni π. Ravan π dijeli prostor $\mathbb{R}^3$ na dva polu-prostora. Izaberimo proizvoljno jedan od tih polu-prostora i zovimo ga gornji polu-prostor. Gledajući dva vektora u, v iz gornjeg polu-prostora, neka je φ ugao izmedju njih, mjeren u smjeru obrnutom kretanju kazaljke na satu. Tada je $u \times v$ vektor čija je veličina jednaka

$$\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\| sin\varphi,$$

smjer mu je na gore i normalan je na ravan π.

Uslov kolinearnosti vektora u i v je $u \times v = 0$.

Iz geometrijske interpretacije vektorskog proizvoda sijedi da je vektor normalan na ravan paralelnu vektorima u i v kolinearan sa vektorom $u \times v$.

Zapemina paralelopipeda čije su tri ivice paralelne vektorima $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3), w = (z_1, z_2, z_3)$ i imaju dužine koje su jednake intezitetima tih vektora, respektivno, jednaka je apsolutnoj vrijednosti determinante

$$\det(u, v, w) = u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Proizvod $u \cdot (v \times w)$ naziva se mješoviti proizvod vektora u, v i w.

3.4 Baza vektorskog prostora

Neka je $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ skup vektora i neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ skalari. Tada vektor $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ nazivamo linearnom kombinacijom vektora $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Skup svih linearnih kombinacija vektora iz skupa S je vektorski prostor koji je razapet vektorima skupa $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Skup vektora $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je linearno nezavisan ako iz $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ slijedi da je $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Skup linearno nezavisnih vektora koji generišu vektorski prostor nazivamo bazom toga prostora.

U trodimenzionalnom prostoru baza ima tri elementa. Označimo ih sa e_1, e_2, e_3. Ako za e_i i e_j, pri čemu su $i, j \in \{1, 2, 3\}$, važi $e_i \cdot e_j = 0$, za $i \neq j$ tada kažemo da je baza ortogonalna. Ako je i $e_i \cdot e_j = 1$, za $i = j$, onda kažemo da je baza ortonormirana.

U ortonormiranoj bazi svaki vektor v ima zapis

$$v = (v \cdot e_1)e_1 + (v \cdot e_2)e_2 + (v \cdot e_3)e_1.$$

4 Koordinatni sistemi

Linija u $3D$ računarskoj grafici je predstavljena pomoću dvije krajnje tačke u prostoru. Iako je ekran računara ravan i $2D$, dubina se predstavlja sve većim umanjivanjem objekata što su udaljeniji od oka posmatrača. To je simulacija prirodnog ljudskog čula vida, pošto su oči posmatrača na maloj udaljenosti i omogućuju, gotovo simultano, gledanje na objekat i shvatanje dubine stereoskopski.

4.1 Dekartove koordinate

U računarskoj grafici se najčešće upotrebljava pravougli Dekartov koordinatni sistem. Dekartov koordinatni sistem (Slika 1) se obično karakteriše sa tri uzajamno orotgonalne ose x, y, z. Tačke u prostoru su jednoznačno odredjene uredjenom trojkom (x, y, z).

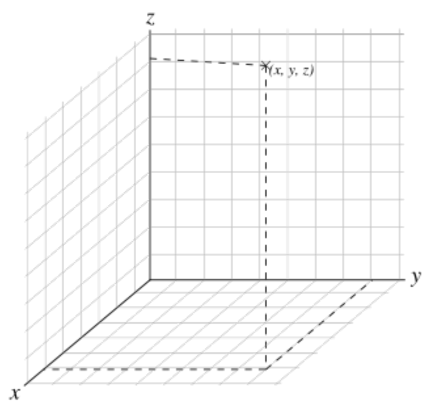

Figure 1: Dekartov koordinatni sistem

Konvencija o medjusobnom položaju koordinanih osa razlikuje se u računarskoj grafici od konvencije u matematici. U računarskoj grafici, $x-$osa pokazuje desno, $y-$osa pokazuje gore, a $z-$osa pokazuje u pravcu posmatrača. Takva konvencija je usvojena uglavnom zbog toga što $x-$osu i $y-$osu zadržava u istoj poziciji kao u slučaju $xy-$ravni. Nedostatak je što se neki teško navikavaju na takav koordinatni sistem.

4.2 Neki drugi koordinatni sistemi

Od ostalih koordinatnih sistema u računarskoj grafici se ponekad upotrebljavaju cilindrični, sferni, baricentrični i generalisani koordinatni sistemi.

4.2.1 Cilindrične koordinate

U cilindričnom koordinatnom sistemu (Slika 2) tačka se zadaje kao uredjena trojka brojeva (φ, ρ, z). Ugao φ naziva se *azimutni ugao* ili jednostavno *azimut*. Koordinata z ima isto značenje kao u Dekartovom sistemu. Sa cilindričnih na Dekartove koordinate i obrnuto, prelazi se pomoću veza:

$$
\begin{aligned}
x = &\quad \rho\, cos(\varphi)\\
y = &\quad \rho\, sin(\varphi)\\
z = &\quad z
\end{aligned}
$$

4.2.2 Sferne koordinate

U sfernom koordinatnom sistemu (Slika 3 tačka se zadaje uredjenom trojkom brojeva (r, φ, θ). Broj r predstavlja rastojanje tačke od koordinatnog početka, a φ je *azimut*, kao u cilindričnim koordinatama. Ugao θ se naziva *polarni ugao*

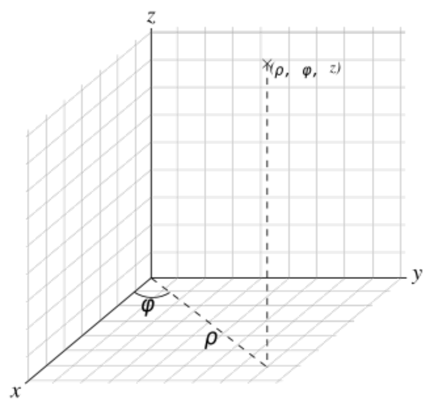

Figure 2: Cilindrični koordinatni sistem

i predstavlja ugao izmedju $z-$ose i linije koja spaja tačku sa koordinatnim početkom. Uvijek važe relacije $0 \leq \theta \leq \pi$. Sa sfernih koordinata na Dekartove koordinate i obrnuto, prelazi se pomoću veza:

$$\begin{aligned} x = & \quad r\,cos(\varphi)\,sin(\theta) \\ y = & \quad r\,sin(\varphi)\,\sin(\theta) \\ z = & \quad r\,cos(\theta) \end{aligned}$$

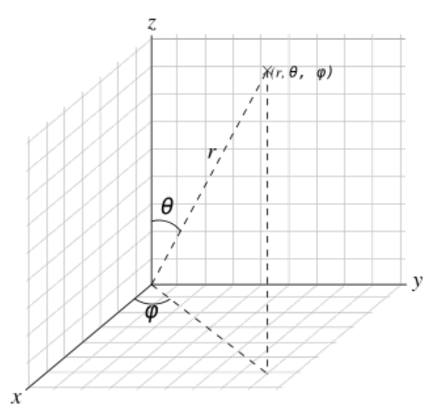

Figure 3: Sferni koordinatni sistem

4.2.3 Generalisane koordinate

Neka su generisane koordinate date uredjenom trojkom (u_1, u_2, u_3) u sistemu S. Ako su odgovarajuće Dekartove koordinate date funkcijama $x(u_1, u_2, u_3)$, $y(u_1, u_2, u_3)$, $z(u_1, u_2, u_3)$, tada se parcijalnim diferenciranjem dolazi do kovarijantne baze sistema S. Skalarni proizvodi kovarijantnih vektora baze daju nam *metrički tenzor* koji je zgodan za računanje dužina, površina i zapremina, na uniforman način, u različitim koordinatnim sistemima.

4.2.4 Baricentrične koordinate

Dekartove pravougle koordinate su odstojanja od koordinatnog početka. Ostali koordinatni sistemi, kao što su cilindrični, sferni ili polarni i njihove generalizacije, takodje zahtijevaju postojanje koordinatnog početka. Sa druge strane, baricentrične koordinate, lociraju tačke u odnosu na postojeću tačku, umjesto u odnosu na koordinatni početak. Zbog toga se smatraju lokalnim koordinatama. Ako su p, q, r tri nekolinearne tačke, tada se tačka $u = \alpha p + \beta q + \gamma r$ sa $\alpha + \beta + \gamma = 1$, i $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ naziva težinska sredina trougla. Za svaku tačku u trougla Δpqr, postoje jedinstveni α, β, γ koji zadovoljavaju uslov $u = \alpha p + \beta y + \gamma r$ i nazivaju se *baricentrične koordinate* tačke u. U računarskoj grafici se često koriste kod interpolacije, ekstrapolacije, odredjivanja položaja tačke u odnosu na figuru, kod računanja površina i zapremina dijeljenjem, u radu sa Bezierovim krivim.

4.2.5 Homogene koordinate

Homogene koordinate daju metod korištenja uredjene četvorke realnih brojeva za rad sa tačkama u $3D$ prostoru. Ako su x, y, z, $w \in \mathbb{R}$ i $w \neq 0$, tada su x, y, z, w homogene koordinate tačke $(x/w, y/w, z/w)$ iz $3D$.

Iz definicije slijedi da četvorke x, y, z, w i x', y', z', w' predstavljaju istu tačku iz $3D$ ako i samo ako postoji realan broj $\alpha \neq 0$ takav da je $x = \alpha x', y = \alpha y', z = \alpha y', w = \alpha w'$. Standardnu uredjenu trojku (x, y, z) izjednačavamo sa uredjenom četvorkom $(x, y, z, 1)$. Tada uredjena četvorka (x, y, z, w) predstavlja tacku $(x/w, y/w, z/w)$ u standardnom prostoru. Na Slici 4 se vidi da se sa figurama iz $2D$ može jednako raditi u ravni $w = 1$, ali i u bilo kojoj ravni $w = \alpha, 0 < \alpha \neq 1$.

Pri $w = 0$ homogene koordinate predstavljaju nedostižnu tačku (tačku u beskonačnosti). U računarskoj grafici se slučaj $w = 0$ ponekad koristi za predstavljanje pravca. Ipak, uvijek se zahtijeva da makar jedna od komponenti x, y, z, w bude različita od nule. Sa bekonačnim tačkama i pravim radi se na prirodan način u homogenim koordinatama.

Uvodjenje homogenih koordinata može izgledati čudno ili slabo motivisano. Naprotiv, to je veoma važan alat za predstavljanje tačaka u računarskoj grafici. Homogne koordinate omogućavaju da se neka afina transformacija predstavi jednom matricom. Projektivne transformacije svode se na linearne transformacije u četvorodimenzionalnom prostoru. Interpolacija je olakšana u homogenim koordinatama, a omogućuju i da se Bezierovim krivim i krivim B-splajnova predstave krugovi i konusni presjeci.

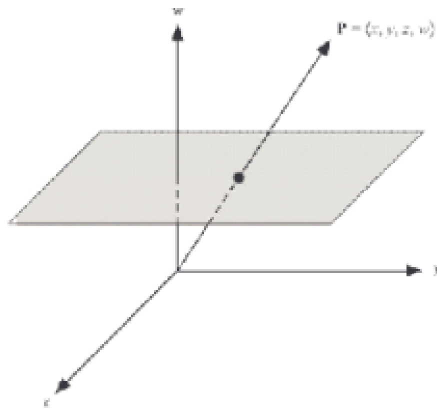

Figure 4: Homogene koordinate i tačke u ravni $w = 1$

Zahvalnica

Autori se zahvaljuju anonimnom recezentu čije primjedbe i sugestije su pomogle da popravimo znatan broj grešaka i da značajno poboljšamo rad.

Reference

[1] S. R. Buss, *3-D Computer Graphics. A Mathematical Introduction with OpenGL,* University of California, San Diego, 2005.

[2] M.Celic, M. Jovanovic, *Matematika III, Uvod u numericku matematiku,* Beograd 1991

[3] J. D. G. Cobas, *Mathematics of 3D Graphics,* Universidad de Oviedo, Blender Conference, 2004.

[4] P. Dembowski, Finite Geometries, Springer, 1968, reprint 1997

[5] F. Dunn, I. Parberry, *3D Math Primer for Graphics and Game Development,* Wordware Publishing, Inc., 2002.

[6] Z. Geller, *OpenGL osnove, Seminarski rad iz Racunarske grafike II,* PMF, Novi Sad, 2008

[7] M. Janjic, *Diferencijalna geometrija,* PMF, Banja Luka, 2006.

[8] M. Janjic, *Linearna algebra,* PMF, Banja Luka, 2008

[9] S. Jokanovic, *Geometrijsko modeliranje,* Mašinski fakultet, Banja Luka, 2006

[10] *OpenGL Programming Guide. The Official Guide to Learning OpenGL,* Version 1.1, Addison-Wesley Pub. Comp.

[11] T. W. Sederberg, *An Introduction to B-Spline Curves,* March 14, 2005.

[12] D. Vidović, *Osnove 3D grafike u OpenGL-u*, Diplomski rad, PMF, Banja Luka, 2008

[13] R. S. Wright, Jr., B. Lipchak, N. Haemel, *OpenGL SUPERBIBLE, Comprehensive Tutorial and Reference,* 4th ed. 2007.

[14] www.rw-designer.com, *web and application graphic resources*

[15] www.wikipedia.org

[16] www.videotutorialsrock.com

[17] www.kidzonilne.org

Primljeno u redakciju Časpopisa MAT-KOL 30 Septembra 2013.