MAT-KOL (Banja Luka)
XXI (1)(2015), 41--49
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5828 (o)
dio: 10.7251/MK150141A

DVANAEST NAČINA RJEŠAVANJA JEDNOG ZADATKA ZA TROUGAO

(Twelve ways to solve a problem for a triangle)

Šefket Arslanagić[1] i Dragoljub Milošević[2]

Sažetak: U ovom radu dajemo dvanaest načina rješavanja jednog zadatka o jednakokrakom trouglu.

Ključne riječi: jednakokraki i jednakostranični trougao, slični trouglovi, lema, Talesova, Pitagorina i Stjuartova teorema; sinusna i kosinusna teorema, Molvajdove formule, adicione formule za sinus i kosinus.

Abstract: In this paper we give twelve ways to solve a problem on the isosceles triangle.

Key words: isosceles and equilateral trinagle, similar triangle, lemma, Thales, Pythagorean and Stewart's theorem, sine and cosine law, Molweide's formulas, addition formulas for sine and cosine.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

Rješavanje zadataka na više načina omogućava iskazivanje svog našeg bogatstva ideja, dosjetki i inventivnosti, a upoređivanjem tih načina može se ustanoviti koji je od njih kraći, efektniji, elegantniji. Matematičko iskustvo učenika bilo bi nepotpuno ako mu nikada ne bismo dali priliku da pokuša riješiti neki zadatak na različite načine. Takvim rješavanjem učenik stiče samopouzdanje, istražuje i gradi svoju matematičku zrelost.

[1] Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, Odsjek za matematiku, Zmaja od Bosne 35, 71000 Sarajevo, BiH; e-mail:asefket@pmf.unsa.ba
[2] 17.NOU divizije 43, 32300 Gornji Milanovac, Srbija; e-mail:dramil47@gmail.com

Ovdje ćemo prezentovati dvanaest načina rješavanja sljedećeg zadatka najmijenjenog mladim matematičarima srednjoškolcima:

Ako je u jednakokrakom trougao ΔABC :

$$\boldsymbol{AB = AC \text{ i } \angle BAC = \angle ABD = 20^0. \; D \in AC,}$$

dokazati da je

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{BC} - \frac{1}{AB}.$$

Rješenje 1: Uvedimo sljedeće izraze: $BC = a$, $AB = AC = b$, $BD = c$. Tada se postavljena jednakost može napisati ovako:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Množenjem obje strane ove jednakosti sa abc dobijamo

$$ab = bc - ac. \qquad (*)$$

U datom jednakokrakom trouglu ΔABC je

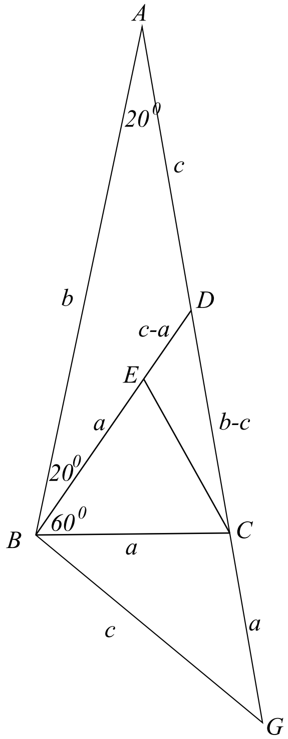
$$\angle ABC = \angle ACB = (180^0 - 20^0) : 2 = 80^0.$$

Trougao ΔABD je također jednakokraki, pa je $AD = BD = c$ i $CD = AC - AD = b - c$. Na duži BD odredimo tačku E tako da je $BE = BC = a$ (slika 1). S obzirom da je $\angle CBE = 80^0 - 20^0 = 60^0$ i $BE = BC$, zaključujemo da je trougao ΔBCE jednakostranični. U trouglu ΔCDE je:

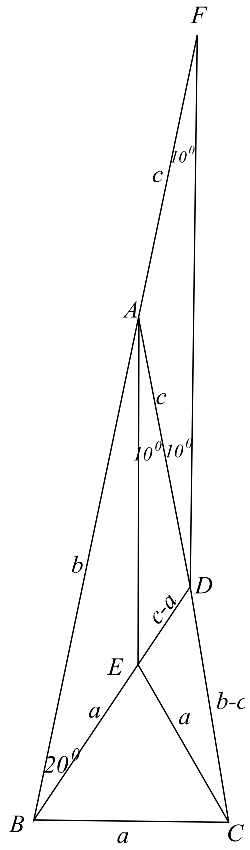
$$\angle DCE = 80^0 - 60^0 = 20^0,$$
$$\angle CED = 180^0 - 60^0 = 120^0$$
$$\angle CDE = 180^0 - (20^0 + 120^0) = 40^0 \text{ i}$$
$$DE = BD - BE = c - a.$$

Produžimo stranicu AC do tačke G tako da $CG = BC = a$. Trougao ΔBCG je jednakokraki, što znači da je $\angle CBE = \angle BGC = \frac{1}{2}(\angle BCA) = 40^0$. Kako je i ugao $\angle BDC = 40^0$, zaključujemo da je i trougao ΔBDG jednakokraki. Zbog toga je $BG = BD = c$. Trouglovi ΔABG i ΔCDE imaju jednake uglove, pa su slični. Na bazi te sličnosti slijedi

$$AB : BG = CE : DE$$
$$\Rightarrow b : c = a : (c - a)$$
$$\Rightarrow b(c - a) = ac$$
$$\Rightarrow bc - ab = ac$$
$$\Rightarrow ab = bc - ac. \qquad \text{q.e.d.}$$



Slika 1.

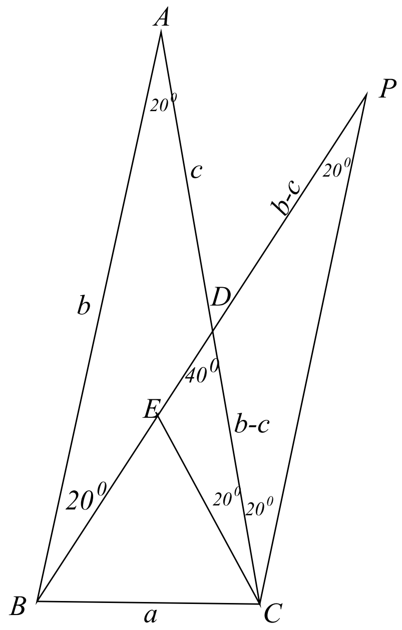


Slika 2.

Rješenje 2. Tačku E odredimo kao u prethodnom rješenju, a potom produžimo stranicu BA do tačke F tako da je $AF = AD = c$ (slika 2). Trougao ΔADF je jednakokraki, pa je $\angle AFD = \angle ADF = \frac{1}{2}(\angle BAC) = 10^0$. Trouglovi ΔAEC i ΔBDF su slični (imaju jednake uglove), pa imamo $CE : BD = AC : BF$, ili $a : c = b : (b + c)$. Iz ove jednakosti, poslije sređivanja, lako dobijamo željenu jednakost ($*$).

Rješenje 3. Tačke E i F odredimo kao u Rješenju 2 (slika 2). Kako je $\angle ADF = \angle DAF = 10^0$, imamo $AE \parallel FD$. Primjenom Talesove teoreme dobijamo $DE : FA = EB : AB$, odnosno $(c - a) : c = a : b$. Iz ove jednakosti lako dobijamo traženu jednakost $ab = bc - ac$.

Rješenje 4. Prvo odredimo tačku E (kao u Rješenju 1), a potom produžimo duž BD do tačke P tako da $DP = DC = b - c$ (slika 3).
Tada je $\angle CPD = \angle DCP = \frac{1}{2}(\angle BDC) = 20^0$. Trouglovi ΔCDE i ΔCPE su slični, pa je $CE : DE = EP : CE$, ili $a : (c - a) = (b - a) : a$. Odavde je $a^2 = (b - a)(c - a)$, odnosno $0 = bc - ab - ac$, što je ekvivalentno sa $ab = bc - ac$, tj. sa ($*$).



Slika 3.

Rješenje 5. Neka je $DK \perp BC, K \in BC$ (slika 4a). Tada je ugao $\angle BDK = 30^0$, pa je u pravouglom trouglu ΔBDK ; $BK = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{c}{2}$. Zbog toga je $KC = a - \dfrac{c}{2}$. Primjenom Pitagorine teoreme na pravougle trouglove ΔBKD i ΔCDK imamo:

$$DK^2 = BD^2 - BK^2 \text{ i } DK^2 = CD^2 - CK^2,$$

pa je

$$BD^2 - BK^2 = CD^2 - CK^2, \text{ ili } c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = (b-c)^2 - \left(a - \frac{c}{2}\right)^2.$$

Odavde, poslije kvadriranja i sređivanja, dobijamo jednakost

$$b^2 - a^2 = 2bc - ac. \tag{1}$$

Neka je ugao $\angle CBL = \angle BAC = 20^0$ i $L \in AC$ (Slika 4b). Tada je $\angle BLC = \angle BCL = 80^0$, što znači da je $BL = BC = a$. Trouglovi ΔABC i ΔBCL su slični, pa je $BC : CL = AB : BC$, ili $a : CL = b : a$. Odavde je $CL = \dfrac{a^2}{b}$. Zbog $\angle DBL = \angle BDL = 40^0$, trougao ΔBDL je jednakokraki, pa je $DL = BL = a$. Kako je $CD = b - a$ i $CD = CL + DL = \frac{a^2}{b} + a$, imamo $b - c = \frac{a^2}{b} + a$, odakle je

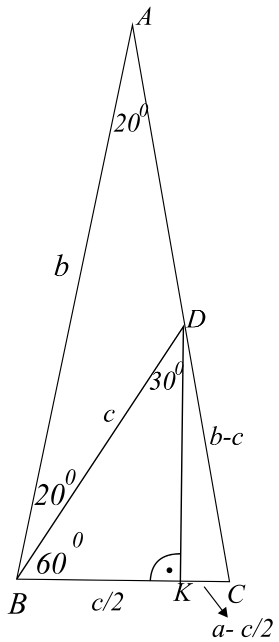
$$b^2 - a^2 = ab + bc. \qquad (2)$$

Iz jednakosti (1) i (2) slijedi

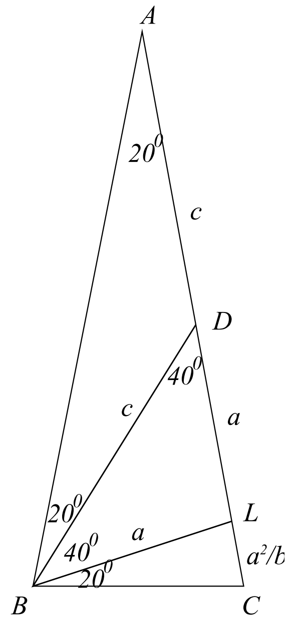
$$2bc - ac = ab + bc,$$

tj.

$$bc - ac = ab. \qquad \text{q.e.d.}$$



Slika 4a.



Slika 4b.

Rješenje 6. Koristiti ćemo sljedeću lemu (pomoćnu teoremu): Ako je u trouglu ΔABC, $\alpha = 2\beta$, onda je $a^2 = b(b + c)$. Jedan njen dokaz nalazi se u [1], str. 52. Na bazi te leme primjenjene na trougao ΔCDE (slika 3), je $CE^2 = DE(DE + CD)$, ili

$$a^2 = (c - a)((c - a) + (b - c)) \Leftrightarrow a^2 = (c - a)(b - a)$$
$$\Leftrightarrow ab = bc - ac. \qquad \text{q.e.d.}$$

Rješenje 7. Primjenit ćemo Stjuartovu teoremu na trougao ΔABC (slika 4), pa imamo

$$AC\left(CD\cdot DA+BD^2\right)=BC^2\cdot AD+AB^2\cdot CD\Rightarrow b\left(\left(b-c\right)c+c^2\right)=a^2c+b^2\left(b-c\right)$$

$$\Rightarrow a^2c=b^2\left(2c-b\right). \qquad (3)$$

Na osnovu kosinusne teoreme primjenjene na trougao ΔBCD (slika 4), dobijamo

$$CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cdot cos\left(\text{R}CBD\right)\Leftrightarrow\left(b-c\right)^2=a^2+c^2-2ac\cdot cos\,60^0$$

(pri čemu je sa R označen simbol $\angle$)

$$\Rightarrow b^2-2bc=a^2-ac$$

$$\Rightarrow b\left(2c-b\right)=a\left(c-a\right). \qquad (4)$$

Iz jednakosti (3) i (4) slijedi

$$a^2c=b\cdot a\left(c-a\right)/:a$$

$$\Rightarrow ac=b\left(c-a\right)$$

$$\Rightarrow ab=bc-ac. \qquad \text{q.e.d}$$

Rješenje 8. Na osnovu sinusne teoreme primjenjene na trouglove ΔABC i ΔABD (slika 4), imamo

$$\frac{a}{sin\,20^0}=\frac{b}{sin\,80^0}\ \text{ i }\ \frac{c}{sin\,20^0}=\frac{b}{sin\,40^0},$$

odakle zbog $sin\,140^0=sin\left(180^0-40^0\right)=sin\,40^0$ slijedi

$$\frac{1}{c}=\frac{sin\,40^0}{b\,sin\,20^0},\ \frac{1}{a}=\frac{sin\,80^0}{b\,sin\,20^0}\ \text{ i }\ \frac{1}{b}=\frac{sin\,20^0}{a\,sin\,80^0}.$$

Sada je

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=\frac{sin\,80^0}{b\,sin\,20^0}-\frac{sin\,40^0}{b\,sin\,20^0}=\frac{1}{b}\cdot\frac{sin\,80^0-sin\,40^0}{sin\,20^0}. \qquad (5)$$

Transformacijom razlike $sin\,80^0-sin\,40^0$ u proizvod, dobijamo

$$\begin{aligned}sin\,80^0-sin\,40^0&=2\,sin\frac{80^0-40^0}{2}cos\frac{80^0+40^0}{2}\\&=2\,sin\,20^0\cdot cos\,60^0\\&=2\,sin\,20^0\cdot\frac{1}{2}\\&=sin\,20^0. \qquad (6)\end{aligned}$$

Iz (5) i (6) slijedi

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=\frac{1}{b}\,/\cdot abc$$

$$\Rightarrow bc-ab=ac$$

$$\Rightarrow ab=bc-ac.$$ q.e.d.

Rješenje 9. Primjenom sinusne teoreme na trougao ΔBDF (slika 2), imamo

$$\frac{b+c}{\sin 150^0}=\frac{c}{\sin 10^0},$$

odakle, zbog

$$\sin 150^0=\sin\left(90^0+60^0\right)=\cos 60^0=\frac{1}{2} \text{ i } \sin 10^0=\frac{a}{2b},$$

dobijamo

$$2\left(b+c\right)=\frac{2bc}{a}\Rightarrow a\left(b+c\right)=bc$$

$$\Rightarrow ab=bc-ac.$$ q.e.d.

Rješenje 10. Za svaki trougao ΔABC, gdje su a,b,c stranice i α,β,γ odgovarajući unutrašnji uglovi, vrijede sljedeće dvije Molvajdove formule

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \text{ i } \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}. \tag{7}$$

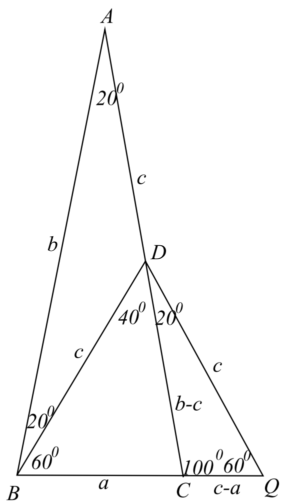
Primjenom prve Molvajdove formule na trougao ΔABD (slika 4), dobijamo

$$\frac{b+c}{c}=\frac{\cos\frac{140^0-20^0}{2}}{\sin\frac{20^0}{2}}\Rightarrow\frac{b+c}{c}=\frac{1}{2\sin 10^0} \text{ (jer } \cos 30^0=\frac{1}{2}\text{)}$$

$$\Rightarrow\frac{b+c}{c}=\frac{b}{a} \text{ (zbog } \sin 10^0=\frac{a}{2b}\text{)}$$

$$\Rightarrow a\left(b+c\right)=bc$$

$$\Rightarrow ab=bc-ac.$$ q.e.d.



Slika 5.

Rješenje 11. Produžimo stranicu BC do tačke Q tako da je $BQ = a$ (slika 5). Tada je $CQ = c - a$. Primjenom prve Molvajdove formule na trougao ΔCQD dobijamo

$$\frac{c+(b-c)}{c-a} = \frac{\cos\frac{100^0 - 60^0}{2}}{\sin\frac{20^0}{2}} \Rightarrow \frac{b}{c-a} = \frac{\cos 20^0}{\sin 10^0}.$$

(8)

Na osnovu kosinusne teoreme primjenjene na trougao ΔABD imamo

$$c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 20^0 \Rightarrow 0 = b^2 - 2bc\cos 20^0$$

$$\Rightarrow \cos 20^0 = \frac{b}{2c}. \qquad (9)$$

Sada iz jednakosti (8), (9) i $\sin 10^0 = \frac{a}{2b}$ slijedi

$$\frac{b}{c-a} = \frac{b^2}{ac} \Rightarrow \frac{1}{c-a} = \frac{b}{ac}$$

$$\Rightarrow ac = b(c-a)$$

$$\Rightarrow ab = bc - ac, \text{ q.e.d.}$$

Rješenje 12. Primjenom druge Molvajdove formule na trougao ΔBLD (slika 4b), imamo

$$\frac{c-a}{a} = \frac{\sin\frac{100^0 - 40^0}{2}}{\cos\frac{40^0}{2}} \Rightarrow \frac{c-a}{a} = \frac{\sin 30^0}{\cos 20^0}$$

$$\Rightarrow \frac{c-a}{a} = \frac{1}{2\cos 20^0} \text{ (jer je } \sin 30^0 = \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{c-a}{a} = \frac{c}{b} \text{ (zbog (9))}$$

$$\Rightarrow bc - ab = ac$$

$$\Rightarrow ab = bc - ac\,. \qquad \text{q.e.d.}$$

LITERATURA

[1] D. Milošević, *Razni dokazi iz geometrije*, MAT-KOL (Banja Luka), XVII(1)(2011), 49-54.
[2] M. Prvanović, *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.

Primljeno u redakciju: 08.04.2014. Dosupno na internetu: a14.04.2014.