MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXI (1)(2015), 51—71 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm dio: 10.7251/MK150151M

О почецима заснивања основа диференцијалног и интегралног рачуна

Павле М. Миличић

Математика последњих столећа почев од 17.в. од тзв. Њутновог периода разликује се од математике предходних времена. Прецизније та разлика почиње са периодом кога су означиле појава Декартове **„Геометрије“ 1637**.г. и Лајбницове студије **„Нови метод максимума и минимума“ 1684**. г. (пун наслов:“*Нови метод максимума и минимума,као и тангената, где разломљене и ирационалне величине нису препреке, и нарочити вид израчунавања тога“).* Због тога се она дуго времена звала (а и данас се понекад нзива ***нова математика***). Она се у односу на претходне математике битно разликује.

Прво, она у својој основи употребљава појам ***променљиве*** величине. Затим, систематски користи ***апстракцију*** и ***дедуктивно закључивање,*** које су, истина и Грци делимично користили од 6. до 5. века п.н.е. Појавиле су се и нове идеје и нове општије методе решавања појединих задатака, идеје којих није било у тзв. ***претњутовској математици***. Појавиле су се алгебарске методе, алгебарске структуре и друге нове области математике. Јер, још су Вавилонци знали да решавају поједине практичне задатке са бројевима па су решавали поједине конкретне једначине првог и другог степена, али општијих метода није било. Појавио се проблем континуума....Али, нову математику највише обележава утемељен и развијен тзв. ***диференцијални и интегрални рачун,*** највећа математичка тековину 17. века.

Ми ћемо овде усмерити нашу пажњу првенствено на неке прилоге појединих математичара који претходе дефинитвном утемељењу, диференцијалног и интегралног рачуна, на прилоге из друге половине 16. века и прве половине 17. века, прилоге који предходе епохалним резултатима **Њутна** и **Лајбница.**

И, да одмах констатујемо: супротно уобичајеним тврђењима из популарних уџбеника из математичке анализе, не би се могло рећи без извесних напомена да су Њутн и Лајбниц открили и створили ***дифернцијални и интегрални рачуна.*** Правилније би било рећи да су они, и без јасних тачних дефиниција реалног броја, бесконачно малиих величина и граничних вредности, завршили стварање основа тог рачуна. Они су, потстакнути идејама и резултатима својих претходника, средили све што је до тада било познато у тој области, прецизирали их,увели нове битне дефиниције и тврђења, направили алгоритаме решавања задатака у тој области.

Они нису први открили ту област. Рудименти тог рачуна су постојали и пре њих.Чак су **Египћани**, пре Грка, израчунавали запремину зарубљене купе, што је водило ка општој идеји мерња геометријских ликова, односно идејама интегралног рачуна. А **Аполоније Пергамски (262-190 п.н.е.)** је дао дефиниције тангенте за криве конусних пресека, тако да је проблем дефинисања тангенте произвољне криве био отворен.У Еуклидовим **„Елементима“** имамо тврђење да од свих правогаоника датог обима највећу површину има квадрат. Дакле, код Грка је постајао је проблем тангенте и појам екстремума „функција“. **Еудоксова (408-355 п.н.е)** теорија односа и метода ексхаустије коју је наставио и користио Архимед су у темељима интегралног рачуна. **Архимед** је одредио површину круга, површину сферног сегмента, сегмента параболоида и обим лопте. Архимед је разматрао и методу конструкције тангенте на кривој, посебно на тзв. Архимедовој спирали $\rho = a\theta$.

Дакле, код њега имамо и прве праве појмове интегралног и деиференцијалног рачуна.

Многи историчари приписују Архимеду откриће основа диференцијалног рачуна 2000 година пре Њутна и Лајбница. Сам Лајбниц је записао***:“Пажљиво читајући Архимедова дела престајете да се дивите свим новим открићима геометричара“***. А, чувена је и следећа Њутнова изјава „ ***Ако сам ја видео даље од других, то је зато што сам стајао на плећима великих гиганата“***.

Дакле, и Лајбниц и Њутн су свакако били инспирисани и идејама грчких математичара а користили су и њихове трагове.

А кулминација грчке математике садржана је у стваралаштву Еуклида, Архимеда, Аполонија и Еудокаса.

То стваралаштво ушло у Еуклидове **„Елементе“** и не само то, Еуклидови „Елементи“ били су синтеза целе античке математике. По „Елементима“ је човечанство изучавало математику читавих два миленијума. То је, вероватно , после „Библије“, најтиражнија књига свих времена. Постоји податак да је само у 1936.г. објављена више од 480 пута на разним светским језицима. Дакле, до половине 20. века та књига је била извор знања из математике у свету.

У новом веку, интересовање за квадратуре и кубатуре грчког раздобља није престало.

Кинез **Лиу Хуи је у 3.** веку користио грчку методу ексхаустије за израчунавање површине круга. **Папус из Александрије (3. век н.е.)** у свој књизи **„Математички зборник“** описао је главне математичке доприносе својих претходника и додао своје оригиналне прилоге из теорије мерња неких ротационих геометријских фигура користећи појам тежишта појединих геометријских ликова. Његове прилоге ће касније користити **Паул Гулдин (1577-1643)** у тзв.“Папус-Гулденовој теореми“. У 5. веку **Чу Чунгзи** је упражњавао посебну методу за кубатуру тела, која ће касније добити име Кавалеријев принцип.

У 5. веку центар математичке културе, из Грчке, се премешта на Исток, са носиоцима те културе, **Индусима** и **Арапима**. Они су направили велике кораке ка новој математици. **Ал-Хорезми (780-850)** решава квадратне једначине, даје приближне вредности броја π ... Од Арапа потичу данашњи називи „алгебра“и „алгоритам“. **Фибоначи (1170-1250)** је његов настављач. Њихови прилози интегралном и диференцијалном рачуну (ако постоје?) нису довољно познати.

О европској математици у време када је арапска математика била на врхунцу мало се зна.

Прошли су векови да би се појавили нови помаци у стваралаштву античке, арапске и индијске математике...

Крајем 11. в. у Европи почињу покрети у науци и техници. Почиње да се упражњава експериментална наука. Појавиле су се школе и универзитети. Почињу да се озбиљно изучавају античка и арапска искуства.

Први универзитет основан је у Оксфорду у 11.в., у Болоњи (1119), у Паризу (1150), у Салерну (1173), у Монпељеу (1180), па затим, у Прагу (1348), у Кракову (1364), Бечу (1365), Будимпешти (1385), Базелу (1459), Братислави (1467). Структура универзитета је била приближно једнака: изучавале су се вештине (уметност), богословија, права и медицина.....

Хришћанство, генерално, није било наклоњено интелектуалном стваралаштву. Напротив. Говорили су „Нама после Христа није потребна никаква љубопитљивост, нису потребна никаква испитивања на тражењу истине“.

Расла је и моћ цркве. **Папа Инноћентије трећи** прогласио се божјим намесником на Земљи. У 13. в. организована је тзв. ***инквизиција,*** орган католичке цркве за пресуде „јеретицима“. Познати **филозоф Бекон** због својих јавних ставова према цркви провео је 14 година у затвору. Од 1231.г. казне „јеретика“ су извођене јавним спаљивањем. Жртве инквизиције броје се стотинама хиљада. На Цветном тргу у Риму спаљен је и **Ђордано Бруно 1600.г.** Пре спаљивања некима су предходно исецали језик због опаких речи које је изговорио. Свима у свету је познато суђење **Галилео Галилеју .**

Но, у пркос свему, математику, њен развитак, ништа није могло да заустави. Европски математичари су у периоду 15-16. века направили велике помаке у решавању једначина.Ту прво треба поменути групу италијанских математичара на челу са **Карданом (1501-1676)** и француског математичара **Виета (1540-1603).**

Али нас интересују прилози тог периода који су у вези са инфинитезималним рачуном, прилози који су потицали стваралаштво Њутна и Лајбница.

Покушаћемо да укажемо само на најважније.

У свом делу **„Беседе“ (1632), Галилеј (1564-1642)** је дошао до математичког проучавања кретања, до проучавања зависности између дужине пута, брзине кретања и убрзања, појмова који су у основи Њутновог заснивања диференцијалног рачуна. (Гелилејови биографи су приметили занимљиву чињениц да је Галулеј рођен исте године као и Шекспир и да је умро исте године као и Микеланђело). „Беседе „ садрже и параболичну путању косог хица као и таблицу висина косог хица и његове удаљености зависно од почетне брзине.На свој начин је дефинисао тренутну брзину код једнако успореног кретања и тиме је успостављао функционалну зависност између два континуума.

Галилејове идеје о питањима чисте математике биле су веома оригиналне. На пример, он је записао да број квадрата природних бројева није мањи од броја свих природних бројева а да број ових није мањи од броја њихових квадрата што није било у складу са Аристотеловим мишљењем.

Он је 1599. проучавао циклоиду, криву којој је он дао име, једну од најзначајнијих кривих у математици. Покушао је да израчуна површину огрничену једним луком циклоиде и правом по којој се котрља круг.Правио је и експеримент да дође до те површине, али није успео.... Касније су ову површину, свако на свој начин тачно израчунали Декарт, Ферма и Галилеов ученик Евангелиста Торичели.

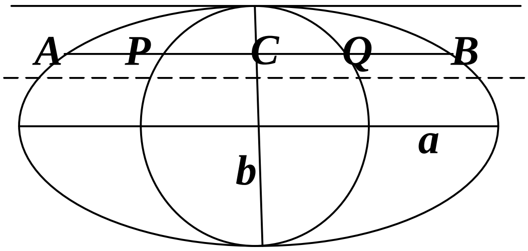
Галилеј је 1640. доказао да ваздух има тежину. Његове идеје су разрађивали његови ученици Торичели и Каваљери. Торичели 1644. одредио тежину атмосферског ваздуха, ваздушни притисак, направио је основе за барометар.

Поред епохалних открића у астрономији **Кеплер** је 1615. у свом делу **„Стереометрија винских бачви“** одредио запремине за 92 обртна тела. Није пратио Архимедову строгост доказивања у математици.Он је површину круга одредио помоћу једнокраких троуглова са врхом у центру круга...а запремину лопте помоћу кружних конуса са врхом у центру лопте. Али једноставност тог израчунавања изазива сумњу у исправност методе.Ни он није био задовољан са својом методом. Био је свестан да ако се основа уписаног троугла све више смањује да она прелази у тачку а троугао у дуж (полупречник круга).Овде се назиру бесконачно мале али још нема граничних вредности.

Видећемо да ће касније тим појмовима ближи бити Ферма.

Галилејов ученик **Бонвентура Каваљери**, професор Болоњског универзитета (1635) у делу **„Геометрија изложена на нов начин помоћу недељивих непрекидног“** је наставио Кеплерове идеје и систематизовао резултате који су до тада били познати из диференцијалног и интегралног рачуна. Он је дао упрошћену варијанту о бесконачно малима која се заснивала на сколастичкој претстави ***недељивих величина.*** Наиме, он је, под утицајем Архимеда, сматрао да се ограничена површ састоји од недељивих линија, ако је равна површ од дужи, а тело од недељивих површи. Дакле, површ је замишљао као ткање из нити ткања а тело као листове из књига. За израчунавање површине равног лика користио је дужине дужи, а за запремину тела користио је равне паралелне пресеке тог тела. Те паралелне дужи и паралелне равне пресеке тела он је звао *недељивим.* Појавио се тако појам *недељивих величина,* као мера недељивих. А површине површи и запремине тела је израчунавао упоређујући недељиве величине двеју фигура.

Илустративан је пример за Каваљеријеву методу израчунавања, помоћу недељивих величина, израчунање површине $\boldsymbol{P}$ елипсе са полуосама a и b на следећи начин. Посматрамо круг полупречника b са центром у центру елипсе.Лако је видети да је тада $d(A,B)/d(P,Q)=a/b$. Зато је $P/P_1=a/b \Rightarrow P=ab\pi$.



Каваљеријева књига је, после Архимеда, означила први почетак развоја интегралног рачуна. До појаве ове књиге није било неког одређеног метода за квадратуре (кубатуре). Сматра се да је њена појава преломни догађај у историји развоја интегралног рачуна. Значај појаве ове књиге се често пореди са значајем појаве Декартове „Геометрије“.

Тада је Каваљери формулисао тзв. ***Каваљеријев принцип*** по коме геометријска тела једнаких висина која имају једнаке површине попречних пресека паралелних једној равни имају једнаке запремине...И данас се у средњој школи корист термин „Каваљеријев принцип“.

Упоредо са Каваљеријовом књигом једно од најзначајнијих дела тог времена а која се тиче инфинитезималног рачуна била је **Џ.Валисова „Аритметика бесконачних величина“** из 1655. г. (Моја напомена : Ако је нешто величина онда оно не може бити бесконачно.). Историчар Стројк је навео да је **Валис (1616-1703)** први математичар код кога је алгебра прешла у анализу. Његови методи увођења бесконачних процеса даје нов квалитет основама инфинитезималног рачуна.Он је, не баш прецизним методама, уводио „бесконачне редове“ и „бесконачне производе“. Тако и Валис припада научним претходницима остварења Њутна и Лајбница.

Тим претходницима припада и један од највећих познаваоца механике у 17. в. холански математичар, физичар и астроном **Кристијан Хајгенс (1629-1695).** Стројк је навео:„Његова књига **Часовници са клатном** представља анализу у њеном најразвијенијем облику тог времена“. Он је открио циклидно клатно и његову примену на часовник. Бавио се ректификацијом кривих, квадратурама површи, проучавао је циклоиду, ланчаницу и логаритамску криву.Тада се, у вези са његовим радовима (око 1673. г), појавио појам евлуте. Колики је познавалац тадашње математике био види се из чињенице да је, на Лајбницову молбу, Лајбницу давао часове из математике. Стројк наводи: „Лајбниц је свој диференцијални рачун открио под непосредним утицајем Хајгенса и током изучавања Декарта и Паскала“.

А сада прелазимо на четири великана нуке 17.века , четири непосреднија претходника Њутна и Лајбница. Биће речи о

- *француском математичару и филзофу Декарту*
  (René Descartes, 1596-1650),
- *француском математичару и правнику Ферми*
  (Pierre Simon de Fermat, 1601-1665),
- *италијанском физичару и математичару Торичелију* и
  (Evangelista Torricelli, 1608-1647),

- *француском математичару физичару и астроному Робервалу (Gilles Personne de Roberval, 1602-1675).*

Као што видимо, они су међусобно савременици. Временски су следбеници **Галилеја (1564-1642)**, **Кеплера (1571-1630)** и **Каваљерија (1598-1647),** и видећемо настављачи њихових идеја. Види се да су временски претходници **Њутна (1643-1727)** и **Лабница (1646-1716),** али као што ћемо видети они су својим стваралаштвом, уз стваралаштва **Џ. Валиса (1616-1703), К.Хајгенса (1629-1695)** и **И. Бароу (1630-1677)** претходили њиховом стваралаштву.

Дакле, они су својим делима непосредно претходили дефинитивном фундирању интегралног и диференцијалног рачуна, и не само то, они су непосредно утицали на стварање целокупне **нове математике** и других егзактних наука у 17. веку. Но, ми ћемо се, углавном, усмерити на оне њихове резултате који припадају почецима диференцијалног и интегралног рачуна.

РЕНЕ ДЕКАРТ (1596-1650)

Један од највећих мислилаца Француске свих времена, оснивач филозофије и науке новог времена. О Декарту и његовом вишеслојном делу написане су многе књиге и одбрањене многе докторске дисертације.

Без сумње, нова математика, модерна математика почиње са Декартом. Историчари тврде да је он истински претеча инфинитезималног рачуна. **Пјер Лаплас (1749-1827)** је записао:“Дан када је Декарт открио своју методу је званични рођендан савремене математике“. Декарт није настављао Грчки пут (све геометријски). Он је направио нови корак. Показао је да се двамиленијумска геометрија може проучавати на сасвим нов начин. Потврдио је да се геометријски објекти могу задавати једначинама, што су и пре њега тврдили католички бискуп **Орезма (1330-1382)** и **Ферма.**

Уместо богате биографије Декарта наводимо једну његову изјаву из његовог дела „Расправа о методу“, која говори којих се он држао начела у животу:“Покоравати се законима и обичајима моје стране, неоступно се придржавати религије, у којој, по милостии божијој сам ја био васпитан од детињства, руководити се мишљењем најбоље умереним, туђити се крајности...“

Школа Ла Флеш, у коју се уписао Декарт разликовала се у то време од других школа, јер се у њој, поред других традицијалних предмета граматике, реторике, богословије, схоластичке филозофије, изучавала математика и физика. У овој школи већ у првом разтреду Декарт се упознао са **Марином Мерсеном (1588-1648)** (теолог и математичар по коме се зову „Мерсенови бројеви“, који је завршавао поменуту школу).Мерсен му је постао прави пријатељ, са којим је касније одржавао близке везе и преко кога је одржавао контакте са другим савременицима, математичарима, физичарима, астрономима и филозофима.

Још у школским клупама посумњао је у истинитост схоластичких наука и филозофије. Био је склон да тврди да је математика образац свих наука, да је разум неограничен, али да је разум без метода бесцињан. Касније му се родила и идеја да уједини све области математике. Шта више носио се мишљу да уреди целу науку по новом методу, по обрасцу математике.. У делу **„Правила за руковођење ума“** записао је:“Областима математике користе се оне науке у којима се разматра или *поредак или мера* и савршено је небитно јесу ли то бројеви, фигуре, звуци, звезде или нешто друго и чиме се изражава та мера“.

Са 17 година је 1612. напустио школу. Касније је изјављивао да она није обавезна да би неко постао научник. 1613. г. долази у Париз где среће свог друга Мерсена.Боравио је и у Фиренци. Занимљиво је да тада није предузео никакве кораке да се сретне са Галилејом који је тада био у Фиренци.

Године 1633. инквизиција осуђује Галилеја због његовог прихватања Коперникових закључака о кретању планета.... Декарта је поразила та вест о осуди Галилеја. Он саопштава Мерцену„Ако је кретање планета лаж онда је лаж сво учење моје филозофије“, тако да се Декарт одрекао неких ранијих својих филозофских идеја. Зашто?!

Основне математичке идеје Декарт је изложио у свом епохалном делу **„Геометрија**“, које је на француском изашло **1637.**г..Декарт је „Геометрију“ објавио као синтезу алгебре и геометрије. Према опште усвојеној оцени у њој је створена аналитичка геометрија. Али то није сасвим тачно. Под њеним утицајем се развила аналитичка геометрија. Године 1637. појавила су се два паралелна записа о правоуглом координатном систему, Фермин и Декартов (о томе ће бити речи касније, у одељку Ферма). А, још раније, у радовима католичког бискупа **Орезме (1330-1382)** налазимо графичко представљање једначина.Занимљиво је приметити да је термине *координате* и *координатне осе* (који се вежу за Декартово име) увео тек Лајбниц 1692. г. После појаве „Геометрије“ почела је неслућена епоха развоја математичке анализе .Садржај Декартове геометрије био припремљен историјским развојем математике. У „Геометрији“ нема Декартових координата, нема једначина праве ни једначина конусних пресека. Декартова заслуга је што је он доследно применио алгебру (већ солидно изграђену) на античку геометрију. Формулисао је тз. **основну теорему алгебре** о броју корена полинома.Многи сматрају да је **Вијет (1540-1603)** отац модерне алгебре. Он је био међу првима који је бројеве означавао словима. Али Декарту се приписује један од најзначајнијих корака у стварању нове математике, увођење ***променљиве*** и што се геометријски објекти могу задавати једначинама са променљивим величинама. Вијетови резултати су били познати Декарту. Он 1637. пише Мерсену даје он почео ту где је Вијет стао.

Видели смо да је циклоиду у разматрање увео Галилеј. То је крива на којој су рођене разне идеје дифернцијалног рачуна, посебно идеја бесконачно малих у математичкој анализи. Тада су се почеле изучавати и друге криве, које описује фиксирана тачка круга који се креће по кругу споља (унутра). (Дакле кинематика је коришћена за дефинисање неких важних кривих). У то време се решавао и проблем тачног дефинисања и одређивања тангенте на кривој у датој тачки. Галилеов ученик **Вивијани (1622-1673)** први је нашао метод конструкције тангенте на циклоиди. Поред њега тај проблем је решио и Декарт, на свој начин. Сваки на свој начин, тај проблем су решили и Робервал и Ферма. Затим се појавио проблем израчунавања запремине тела насталог ротацијома циклоиде око разних правих.Тај проблем су решавали независно један од другог Робелвал, Б.Паскал, Торичели и Хајгенс. Циклоиди је Б.Паскал посветио свој знаменити **„Трактат о рулету“** (рулет је француска реч за циклоиду). За овај трактат је Даламбер (1717-1783) рекао да је „чудо проницљивости“. **К.Рен** (1632-1723), енглески физичар, астроном и математичар, је први израчунао дужину циклоиде (ректификација циклоиде).

У периоду 1619-1624. г. Декарт се бави теоријом кубних једначина. Бави се и класичним античким проблемима из математике, трисекције угла и подвостручењем коцке , на савременом језику одређивањем конструкцијом (лењиром и шестаром) дужине x из једначине $x^3 = 2a^3$. Чак је предложио и један механички инструмент који је описао у „Геометрији“, којим се могла одредити дужина ивице подвостручене коцке, односно којим се може одредити (конструисати) непозната у једначини

$$ {}^{1}\!/_{x} = {}^{x^2}\!/_{2a^3} \ .$$

Декарт је дефинисао број $\sqrt{a}$ као решење једачине

$$1 : x = x : a$$

односно сматрао је да је овде $x = \sqrt{a}$ и $x^2 = a$. Користећи ту дефиницију долази до појма $\sqrt[n]{a}$. Посматра продужену пропорцију

$$1 : x_1 = x_1 : x_2 = x_2 : x_3 = \cdots = x_{n-1} : a .$$

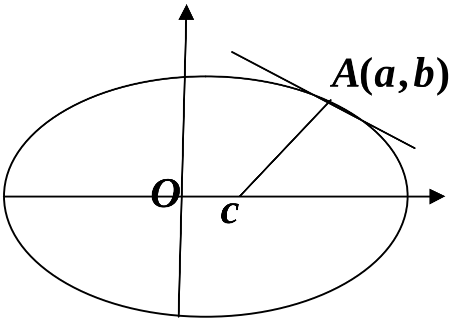
Одавде добијамо

$$x_1 = \sqrt{x_2}, x_2 = \sqrt{x_1 x_3}, x_1 = \sqrt{\sqrt{x_1 x_3}} = \sqrt[4]{x_1 x_3}, x_1^4 = x_1 x_3, x_1^3 = x_3,$$

тј. $x_1 = \sqrt[3]{x_3}$. На овај се начин долази до једнакости $x_1 = \sqrt[n]{a}$.

У вези проблема преламања светлости Декарт је тражио форму површи кроз коју би се после преламања сви зраци светлости сусрели у једној тачки, односно површ кроз коју пролази светлост без аберације. Такав математички задатак доводи до појма интеграције обичне диференцијалне једначине првог степена. Решавање овог проблема довело је Декарта до потребе конструкције тангенте и нормале криве и до дефиниције нових овалних линија које је описао у „Геометрији“.

А у вези са овалима Декарт је посматрао променљиве дужине одсечака, што је довело до појаве појма координата тачке на једној правој. Ево како је Декарт одредио нормалу на елипси у датој тачки.



Нека нормала елипсе сече x осу у тачки c,тада се круг са центром у c који садржи A тј. $(x-c)^2+y^2=(a-c)^2+b^2$, и елипса $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ додирују у тачки A. Елиминацијом y из ове две једначине добијамо једначину по x за коју је a двострук корен на основу кога он одређује c **методом једнаких коефицијената.**

Добро нам је познато да и нека данашња математичка терминологија потиче од Декарта: "Декартове координате" (реч „координата" је увео Лајбниц 1692.), „Декартов, Картезијански, производ", „ Декартов лист", „Декартови овали", „Декартова правила знакова" и „Декартов метод неодрђених коефицијената".

Само због овог, горе споменутог, многи историчари математике сматрају да Декартова „Геометрија" означава почетак нове математике, почетак нове математичке епохе.

Заиста, ако се још узме појам ***променљиве*** коју је он увео у математику, са сигурности се може рећи да од њега почиње ***нова математика.***

Појава Декартове „Геометрије" различито је коментарисана у научном свету. Поред великог одушевљења код многих, било је и критика због „позајмњених" резултата других математичара као што су **Вијет (1540-1603), Гариот (1560-1621), Жирар (1595-1632).** (Вијет и Гариот су раније наговештавали да важи основна теорема алгебре "једначина n-ог степена има n корена". Жирар је са Вијетом направио основу за теорију симетричних функција корена једначине.). Геометар **Шал (1793-1880)** окарактерисао је садржај „Геометрије као „ *дете које се појавило на свет без мајке*". То је свакако некоректно јер су Декартове идеје у „Геометрији" касније дале значајне плодове. Ако ништа друго Декарт је очистио алгебру од геометрије. А у вези критика, које су упућене на његов рачун, Декарт је у једном писму Мерсену 1648. признао да је тешко написао „ Геометрију" само да би понизио Робервала и друге своје противнике.

Декартов прилог математици није само „Геометрија". У преписци са другим математичарима он је дао решења многиих задатака везаних за бесконачно мале величине који су иницирали нове проблеме у диференцијалном и интегралном рачуну.

Он је израчунао површину сегмента парабола $y=x^n$, што значи да је израчунавао $\int_0^x x^n dx$. Израчунавао је површину сегмента потциклоиде. Израчунавао је запремине сегмената ротационог параболоида, центре тежишта, тежишта сегмената парабола и параболоида. Нашао је метод конструкције тангенте на параболу и на циклоиду. Дефинисао је тзв. *овалне криве*. Открио је и испитивао логаритамску спиралу, увео је у разматрање криву, тзв. Декартов лист,

$$x^2+y^2=3axy.$$

Робервал је описао облик ове криве, а коначну форму ове криве дали су крајем 17. века Хајгенс и И. Бернули.

У његовој полемици са групом математичара у вези са налажења максимума и минимума и конструкцијама тангената добијени су важни резултати које су прецизирани Ферминим методама.

Огроман је Декартов допринос развоју лгебре као самосталне математичке дисциплине, независно од геометрије. Трајни су његови доприносио о коренима полинома. Непроцењив је значај његовог картезијанског погледа на геометрију, његовог допринос стварању аналитичке геометрије, његове симболике којом се и данас служимо.

Није нам циљ да се општије осврћемо на друге Декартове доприно математици и другим наукама, посебно филозофији. Он је био први филозоф који је у стању да негире неке Аристотелове ставове, велике су његове расправе о сумњи у његовој “Расправи о методу“). Немогуће је овде наводити Декартове доприносе механици и физици, немогуће је говорити о његовим доприносима оптици, о његовим расправама о кретању тела о „количини кретања“, о његовим прилозиима проблемима физичког клатна и тд.

ПЈЕР ФЕРМА (1601-1665)

Дуго времена, и после његове смрти, о животу Ферме се није много знало. Знало се да је живео у Тулузу. Ферма је завршио студије права. По завршетку студија са великим успехом се бавио адвокатуром. Са лакоћом је писао стихове на свом француском, латинском и шпанском језику. Године 1629. дошао је до Папових латинских превода Аполонијевих радова. Те исте године Ферма обавештава Робервала о свом великом открићу метода налажења максимума и минимума. Своје резултате није објављивао, већ је о њима водио интезивну преписку са савременицима. Поред Робрвала , Ферма је полемисао о својим и научним резултатима других математичара, са Мерсеном, са оцом и сином Паскал, са Декартом, Каваљеријем, Торичелијем, Хајгенсом и др.

Прво сачувано његово писмо из 1636. г. објављено је под насловом **„Увод у равна и теласна геометријска места“,** где су дате основе аналитичке геометрије равни. У том се спису наводи да једначина која садржи две непознате описује неко г. место, праву или равну криву. При томе он, користећи две праве које се секу под произвољним углом (као неки координатни систем), описује како се графички може добити слика тог г. места. После тога он изводи једначину праве, уз коришћење Вијетових ознака. Такође изводи једначину хиперболе помоћу њених асимптота.

Напоменимо да је Декартова „Геометрија“ објављена годину дана после Ферминог писма, што значи да је Ферма пре Декарта оперисао са координатним системима. Неки историчари, на основу сачуваних писама, мисле да је Ферма могао развити идеју аналитичке геометрије пре објављивања Декартове „Геометрије“.

Али једно је сигурно,Ферма је један од претеча у стварању основа диференцијалног и интегралног рачуна.То се види, прво, из његових метода одређивања екстремума и одређивања тангенте на криву у датој тачки. Даламбер је у својој „Енциклопедији“ записао: „У Ферме се прво срећемо са првим прилогом дифернцијала за налажење тангенте“. Његово преимућство у стварању нове математике истичу и Лагранж и Лаплас. Сам Ферма је свој метод, **„Метод одређивања максимума и минимума“** прво саопштио преписком Декарту.

Објаснимо његов метод на једном примеру, на примеру поделе дужи дужине a на два дела чији је производ максималан (на делове од којих се може направити правоугаоник максималне површине). Користићемо савремене ознаке.Тражи максимум израза $x(a-x)$. За решење тог задатка Ферма уместо променљиве x узима променљиву $x+h$ где је h веома мали позитиван број кога ће касније занемарити (остаје некоректност у том „веома малом броју“). Даље овако тече закључивање:

$x(a-x)=(x+h)(a-x-h)$, одакле је $ha=2hx+h^2$ тј. $a=2x+h$ те је, после занемаривања броја h, $x=a/2$.

Као што видимо он је за функцију $f(x)=x(a-x)$ формирао израз

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

кога је изједначио са нулом, скратио разломак са h и у остатку занемарио број h. Зна се да је овј израз у основи дефиниције извода и савременог диференцијалног рачуна.Ову своју методу Ферма је применио при решавању проблема тангенте. Он је за коефицијент тангенте криве $y=f(x)$ у тачки x узео израз (1) после занемаривања h. Број h у Ферминoм разматрању није променљив већ константан, па иако се претпоставља да је врло мали, овде немамо граничну вредност тако да се не може тврдити да је он творац диференцијалног рачуна.

И. Бароу је у својим **„Лекцијама“** 1670. г.уместо Фермаовог константног h „најавио“ бесконачно малу h чиме је наговестио стварање правих основа инфинитезималног рачуна. У тој публикацији он је први дефинисао проблем одређивања тангенте на примерен начин. (И.Бароу је био Њутнов учитељ, енглески теолог и математичар).

У сваком случају Фермин израз (1) је водио Њутновом и Лајбницовом диференцијалном рачуну. Колики је то био помак према диференцијалном рачуну види се из следећег детаља. У 1934. г. било је објављено Њутново писмо у коме он недвосмислено говори да је за свој дифернцијални рачун нашао наговештај при изучавању Фермине методе одређивања тангенте.

Пре Ферме, Кеплер је 1615. у „Новој стереометрији винских бачви“ тврдио је да функција у близини тачке максимума мало мењају свој облик. Ферма је био прецизнији па је тврдио да са обе стране тачке екстремума функција има иста значења, у савременим ознакама то би се могло исказати са тврђењем да су вредности

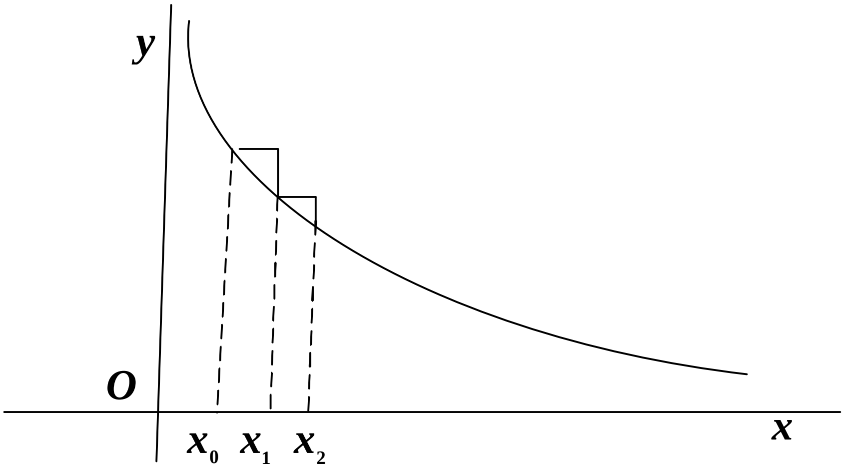
$$f(x+h) \text{ и } f(x-h)$$

истовремено веће од $f(x)$ или мање од $f(x)$ за мало h. Ферма је имао и своје методе за одређивање превојних тачака те криве криве.

Први Фермини радови из квадратура и кубатура (израчунавања површина равних ликова и запремине тела) појавили су се у спису **„Одговори**

на питања Б.Каваљерија“ које је он посредством Мерсена послао Каваљерију.

Ево како је Ферма израчунавао површину дела површи ограничене хиперболом $y = 1/x^2$.



Он је замењивао део површине испод хиперолe збиром површина правоугаоника, слично Архимедовој методи ексахаустије, с тим што основе правоугаоника нису једнаке већ образују бесконачну геометријску прогресију.

Прецизније, помоћу променљивог броја $\varepsilon > 1$, он је посматрао деоне тачке на $x-$оси $x_0, x_1, \cdots x_n, \cdots$ такве да је

$$x_1 = x_0\varepsilon,\, x_2 = x_1\varepsilon = x_0\varepsilon^2, \cdots, x_n = x_0\varepsilon^n, \cdots$$

$$x_1 - x_0 = x_0(\varepsilon - 1),\, x_2 - x_1 = x_0\varepsilon(\varepsilon - 1),\, x_3 - x_2 = x_0\varepsilon^2(\varepsilon - 1), \cdots$$

Што значи да површине правоугаоника обрзују геометријску прогресију са првим чланом $y_0(x_1 - x_{0)})$ и количником $1/\varepsilon$, при чему $x_n - x_{n-1} \to 0$ кад $\varepsilon \to 1$.Збир те прогресије је

$$S(\varepsilon) = \frac{y_0(x_1 - x_0)}{1 - 1/\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} y_0 x_0(\varepsilon - 1) = \varepsilon y_0 x_0 = \frac{\varepsilon}{x_0}.$$

Отуда $S(\varepsilon) \to y_0 x_0$ кад $\varepsilon \to 1$. Ово значи да је Ферма тачно израчунао несвојствен интеграл

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x_0}.$$

Касније ћемо видети да је овај несвојствен интеграл на свој начин израчунао Торичели користећи Каваљеријев принцип недељивих.

У 1660. Ферма је објавио спис **„О упоређивању кривих линија са правима“** у којем се излаже могућност ректификација кривих линија и њихових примена.

Потребно је овде напоменути да је Фермин метод квадратура радикално друкчији од метода који су користили Архимед, Кеплер, Каваљери па и Робелвал. Њихове методе су чисто геометријске док је Фермина метода геометријско- алгебарска. Он за коначан резултат користи збир бесконачно геометријске прогресије, што је корак напред, јер је у то време алгебра била далеко од геометрије. Осим тога он користи координате, које је сам увео. Фермина метода је ближа савременом појму интеграла јер користи интегралне суме и граничну вредност. Дакле, Фермина метода квадратура површи, кубатура тела, ректификација кривих, одрђивања тежишта тела је корак више ка савременим појмовима од метода које су за те проблеме користили Кеплер и Каваљери (чисто геометријске методе). Кеплерови и Каваљеријеви резултати не поседују строгост коју имају Фермаови резултати. Унаточ свега тога не може се рећи да је он творац интегралног рачуна јер он није имао никаву везу између свог дифернцијалног рачуна и свог интегралног рачуна.

Та веза,веза између операције диференцирања и интеграције, се наговестила у радовима Торичелија и појвом И. Бароуве публикације **„**Лекције**“** 1670.

Применом своје методе одређивања екстремума Ферма је решио проблеме преламања светлости при пролазу из једне средине у другу.

Основе математичке анализе које је Ферма иницирао и његов рад на преламању светлости изазвале су велики спор и свађу између њега и Декарта. Водили су се прави мали ратови између њих а посредством Мерсена, Робервала и старијег Паскала, Декартових пријатеља. О томе ћемо касније.

Декарт је сматрао да је тангента криве положај сечице криве кроз „две блиске тачке“ (али, шта су две блиске тачке, да ли је мислио на гранични случај?). Ту дефиницију је касније прихватио Ферма па и Лагранж, па се сматра да је Декарт први дфинисао тангенту криве у тачки, те да је он истински претеча појмовима око тангенте. Тек 1934. г.нађено је Њутново писмо у коме је наведено да је Њутн за свој диференцијални рачун добио идеју из Ферминих расправа о тангенти.

Овде је немогуће поменути све Фермине доприносе математици и физици. Колосални су његови резултати из области теорије бројева, резултати који га чине бесмртним, затим резултати из теорије вероватноће, прилози варијационој методи у физици и механици.

Због свега што је речено, може се са сигурношћу тврдити да је Ферма, уз Декарта, један од најзначајнијих француских математичара 17. века који је заслужан за фундирање аналитичке геометрије и математичке анализе. Имао је велики утицај и значај за развој других нових математичких дисциплина и целокупне нове науке у 17. веку.

ЕВАНЂЕЛИСТА ТОРИЧЕЛИ (1608-1647)

У научним круговима италијански научник Торичели је познатији као физичар него као математичар.Међутим иако је релативно мало живио, 40 година, оставио је значајне трагове у физици и у стварању нове математике а посебно диференцијалног и интегралног рачуна. Након што је **1642.** г. умро Галилеј Торичели га наслеђује као професор математике на универзитету у

Пизи. Пресудан утицај на његово образовање имао је професор римског универзитета **Бенедито Кастели (1578-1643)**, Галилејов ученик, који је био професор и Каваљерију. Торичели је себе сматрао да је математичар галилеиста, мада је он, у суштини, био физичар. Поред свега тога он је био познати литерата и стилиста. Велики познавалац античке науке и уметности. Његови списи су пуни цитата Виргилија, Овидија, Лукреција, Тита Ливија, Сенеке, Плинија, Платона, Аристотела и других.

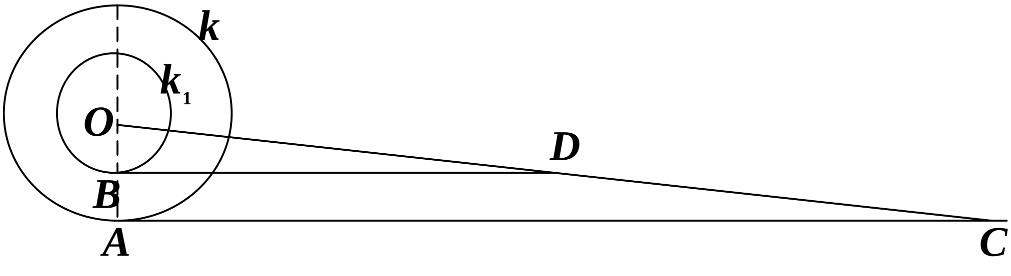
Огромни су Торичелијеви прилози претњутновској физици, сетимо се само његовог **барометра** са којим се и данас свет служи, његови прилози у балистици и т.д.

Као што је познато прва половина 17. века обележена је великим прилозима математици, квадратурама и кубатурама тј. израчунавању одређеног интеграла. Кеплер, Ферма, Каваљери, Робервал и многи други имали су своје методе и технике израчунавања неких одређенихг интеграла. Али није било јединствених метода за налажење квадратура (кубатура).

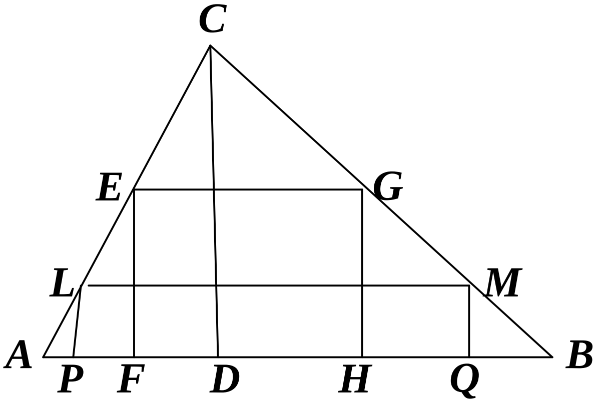
Поменута Кављеријева „Геометрија недељивих“ (1635.) је прва општа метода квадратура (кубатура), била је први путоказ предисторији интегралног рачуна.

По Квальерију израчунавање непознате површине (запремине) своди се на проналажење односа непознате површине површи и познате површине друге површи (непознате запремине тела према познатој запремини другог тела) а непознати однос је добијао преко односа тзв. недељивих величина одговарајућих фигура. Каваљеријева метода је била несавршена, као општа метода. На пример, није сасвим коректно упоређивати величине једне димензије и величине друге димензије.

Торичели је прецизирао и унапредио неке Каваљеријеве поставке из његове књиге. На пример, ако су у питању две површи онда он истиче да се на једној површи могу као недељиве употребити дужи а на другој криви лукови.То је илустровао израчунавањем површине круга, на следећи начин. Ознаке: k круг полупречника R, k_1 круг полупречника r, $d(A,C)=2R\pi$, $d(B,D)=2r\pi$.Тада је површина троугла OAC једнака $R^2\pi$ тј. једнака површини круга k. Овде су недељиве троугла AOC дужи типа BD а недељиве круга k кругови типа k_1.



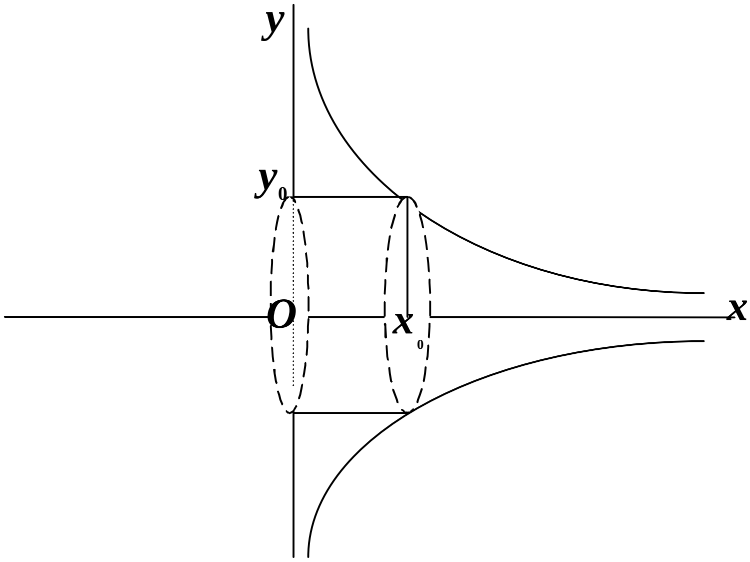
Осим тога решио је један парадокс који се појавио применом Каваљеријева правила. Наиме, по Каваљеријевом принципу, на следећој слици, требало би да се површине ΔADC и ΔCDB односе као дужине недељивих EF и GH тј. да су површине та дава троугла једнаке што није тачно.



Торичели је открио да парна једнакост недељивих није довољна за једнакост површина. У овом случају, растојања одговарајућих недељивих морају бити једнака.

Али та метода иако несавршена била је једина општа метода израчунавања одређеног интеграла пре метода Њутна и Лајбница.

Велику сензацију је Торичели изазвао израчунавањем несвојственог интеграла са једном бесконачном границом, применом свог уопштења Каваљеријевог принципа. Наиме он је израчунао запремину V тела T које настаје ротацијом дела хиперболе $xy = 2k^2$ око $x-$осе, за $x > x_0$, запремину тзв. оштрог хиперболоида. Уз ово тело посматрао је кружни цилиндар полупречника y_0 и висине x_0 За недељиве Торичели је узео омотаче кружних цилиндара полупречника y и висине x. Површина недељиве (омотач цилиндра) је $2\pi yx = 2\pi .2k^2 = \pi(2k)^2$. То значи да површине недељивих не зависе ни од x ни од y па је однос недељивих тела T и цилиндра једнак 1. Запремина цилиндра је $\pi 2k^2 y_0$. Зато је $\dfrac{V}{\pi 2k^2 y_0} = 1$ тј.$V = \pi 2k^2 y_0$. Дакле, он је добио да је $\int_{x_0}^{\infty} \dfrac{\pi 4k^4}{x^2} dx = \dfrac{4k^4 \pi}{x_0}$.



За ово тело T везан је један парадокс.Наиме, видели смо да ово тело има коначну запремину, али (лако се може показати преко интеграла), оно има бесконачну површину. Како то?

Торичели је посматрао још неке типове хиперболоида $x^m y^n = C$ и добио услове, за неке, под којим се њиховом ротацијом добија тело коначне запремине, други речима он је добио услове егзистенције неких несвојствених интеграла.

Не мање важно од горе реченог било је „исправљање кривих“ $y = Ce^x$, $\rho = Ce^{-\theta}$ (ректификација кривих). Дуго времена се сматрало да је то први учинио Ферма 1660. („О упоређивању кривих линија са правом“). Тек је 1928. откривено да је то први учинио Торичели. Он је израчунао дужину лука логаритамске спирале. Занимљиво је напоменути да је то „исправљање“ криве, како се тада говорило, доводило поново до несвојственог интеграла.

Напоменимо да је он самостално нашао суму опадајуће бесконачне геометријске прогресије што је користио при израчунавању добијених несвојствених нтеграла. Торичели је за ректификацију неких кривих користио збирове који су касније добили назив Симсонова формула.

Позната је у геометрији Торичелијева тачка у троуглу за коју је збир растојања од темена трогла до те тачке минималан. Друга Торичелијева тачка троугла је тачка из које се све стране троугла виде под углом од 120°. За животну праксу су веома значајна решења ових задатака. Веома су значајни Торичелујеви закључци о тежишту тела, његове методе за одређивање центра тежине тела.Он је жалио што се откриће барометра не приписује Галилеу већ њему.

Али, најважнији резултат Торичелија који је водио ка дефинитивном постављању основа диференцијалног рачуна и интегралног рачуна јесте његов кинематички закључак да су ***диференцирање и нтеграција међусобно обрнуте операције***. Дакле, он је познавао суштину појма извода и интеграла.

Наиме, прихвата се да је до тог закључка дошао Исак Бароуа. Али сам Бароуа сматра да су његови претходници у томе Галилео и Торичели. Галилео је знао да је дужину пређеног пута једнако успореног кретања пропорцијална брзини кретања. Торичели је показао да је брзина кретања пропорционална тангенсу угла графика дужине пута у функцији времена. На тај се начин долази до тзв. Бароуве теореме

$$s = \int_{t_0}^{t} v(t)dt; \quad v(t) = \frac{ds}{dt} \ .$$

Бароу је само уклонио кинематичке елементе из доказа да би добио опште тврђење о функцијама. Зато се у Италији та теорема, тзв. Њутн-Лајбницова теорема, назива Торичели –Бароуова теорема,

У писму Галилеу 1641. Торичели је описао своју кинематичку методу конструкције тангенте криве у датој тачки. Али тај метод се данас приписује Ферми.

ЖИЛ РОБЕРВАЛ (1602-1675)

Биографски подаци француског математичара, механичара, астронома и физичара Робервала су врло оскудни. У ствари они не постоје. Не постоји ни његов портрет. Историчари се држе максиме “историја научника је историја његовог открића“ па ћемо навести само неке податке везане за његов научни рад. Он је желео да буде научник и постао је, научник свога времена, не само математичар него и физичар и астроном, али првенствено је био математичар. Појавио се он 1628. у Паризу као 26. годишњи младић са именом Жил Персон, који тражи своју будућност. Он жели да постане научник.

Успео је да ступи у контакт са Мерсеновим кружоком математичара, физичара и астронома. Његове амбиције су биле велике , сматрао је да његово име Жил Персон није на париском нивоу, па је променио своје име у de Roberval (Роберavailable је назив села у коме су живели његови родитељи а речица de означава неку назнаку племства).

Преко Мерсеновог кружока Робервал је упознао многе математичаре. Тада му се појавила амбиција да конкурише за шефа Рамусове катедре на Колеж де Франс, (**Пјер Рамус 1515-1572**, знаменити научник тог времена). Услови конкурса су били веома високи али је Робервал приложио своје научне резултате, и успео је. Преживео је све реизборе који су се спроводили сваке три године тако да је он држао Рамусову катедру све до своје смрти.

Робервал је првенствено физичар али су његови разултати из математике, које је добио решавајући физичке проблеме, врло значајни, мада, су неки чак и непрецизни чак и погрешни. Међутим сви они имају своју принципијелну вредност, јер припадају важним математичким проблемима тог времена.

Мерсен је упознао Робервала са тзв. Аристотеловим парадоксом у вези циклоиде (објаснити!). Он није био у стању да одмах реши тај парадокс. Решио га је после шест година. Он има радова, и из алгебре и геометрије, али се највише бавио проблемима диференцијалног рачуна.

Видели смо да су се тридесетих година 17. века увелико стварале неке основе инфинитезималног рачуна, вршене су квадратуре и кубатуре извесних фигура, одређивала су се аналитички тежишта неких тела, расправљало се о конструкцији тангенте криве (Декарт, Ферма, Торичели, Каваљери). Комуникација је ишла преко Мерсена. Робервал се прикључио тој групи ствараоца. За квадратуре и кубатуре углавном су се користиле Каваљеријеве методе недељивих. На свој начин, наводно својом методом недељивих, и Робервал је вршио квадратуре и кубатуре.

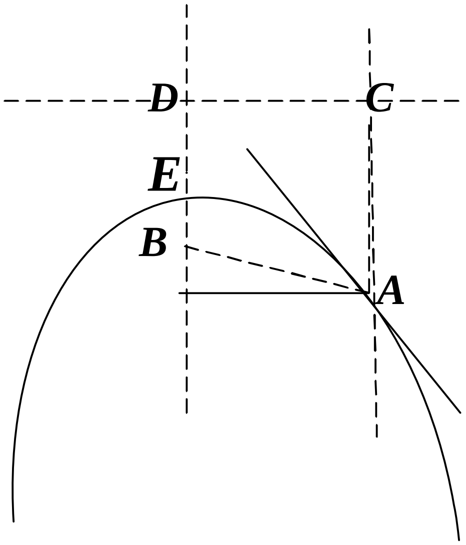
Није искључена могућност да је Робервал био упознат са Каваљеријевом методом недељивих пре него се појавила Каваљеријева књига. Могуће је да је сам дошао до те методе?Та могућност се појављује уз чињеницу да је Каваљери своју методу био завршио 1629. Није је скривао, саопштавао је писмима другим математичарима а Робервал је свој метод недељивих користио пре 1630.

Својом методом тзв. недељивих он је , први, (1634-1636) израчунао површину дела циклоиде и запремину неких ротационих тела. Њему се приписује ауторство познате формуле за координате тежишта чврстог тела (преко координата). Он је као и Кеплер (Стереометрија винских бачви, 1616.) показао да се заменом строгих метода Архимеда и Аполонија мање строгим методама проширује круг решених задатака, што доводи до нових идеја.

Робервал је свој метод недељивих показао је на квадратури дела површи ограниченог правом и циклоидом. Тачно је израчунао ту површину. Робервал је за њу био заинтересован и због Аристотеловог парадокса, кога је тада решио. За одређивање њене површине користио је стари појам синуса као дужине тетиве круга. Он је тада први пут у историји је нацртао синусоиду. Методом недељивих он је израчунавао запремине неких ротационих тела, насталих ротацијом циклоиде око одређених правих.

Најоригиналнији Робервалов приступ савременим проблемима тадашње математике јесте његов кинематички метод одређивања тангенте на криву.Он је дао свој метод независно од Торичелија. Метод је заснован на два става кинематике:1) брзина сложеног кретања се изражава дијагоналом паралелограма конструисаног над појединачним брзинама, 2) брзина тачке у сваком тренутку се поклапа са правцем тангенте трајекторије тачке.

Следи објашњење уз следећу слику када је трајекторија парабола. Према дефиницији параболе:Теме параболе у тачки E ,тангента у тачки A, жижа у тачки B, директриса пролази кроз тачку D. Будући да се тачка креће по параболи то се брзина тачке v разлаже на брзину v_1 дуж AB и брзину v_2 дуж AC и при том је $d(A,B)=d(A,C)$ па је $v_1=v_2$.Зато се тангента t у тачки A поклапа по равцу са брзином v, тј. дијгоналом ромба са страницом AB и теменом A.



Том методом Робервал је конструисао тангенту на елипсу и још многе друге криве. Посебно на циклоиду и на Архимедову спиралу. Ипак у тој методи су тек 1831.(Цејтен, „Историја математике“) откривене неке скривене грешке.

Као и Торичели, Роберваl је (1642.,1643.) израчунавао дужину лука логаритамске спирале, користећи, у суштини, несвојствен интеграл, с тим што је код њега подинтегрална функција тежила бесконачности у околини границе, а код Торичела (1640) је граница тежила бесконачности.

Укратко: Роберваl је самостално или уз неке идеје других открио методу недељивих, открио кинематички метод конструкције тангенте и разне особине циклоиде.Израчунао је и неке несвојствене интеграле које овде не наводимо. Он је потстакао даљи развој алгебре (специјалан случај Виетове теореме) и геометрије (извео је једначине конусних пресека). Њему се приписује следећа теорема елементарне геометрије која је саопштена 1715.г. у Академији наука :“Средине страница четвороугла образују темена паралелограма“.Својим математичким резултатима он се уврстио међу прве математичаре Француске, као што су Ферма и Декарт.

Роберваl је први дао дефиницију силе. До тада није било никаквих сила до силе теже и њених последица. Бавио се статиком Стевина. Подржавао је хелиоцентрични концепт Коперника. Роберваl је био велики експериментатор.

Он је један од 7 научника који је 1666. основао Париску академију наука. Настала је из помињаног Мерсенова кружока. Академија је после његове смрти 1693. објавила сву његову архиву.

Иако су се често бавили истим проблемима ова четворка (Декарт, Ферма,Торичели, Роберваl) нису стално били у сагласности око приоритета и важности појединих појмова и тврђења које су обрађивали. Препирали су се око математичких резултата а и других актуелних питања тог времена. Почело је са тиме када је Декарт послао своју „ Диоптрику“ Ферми. Ферма је критиковао главни Декартово полазиште у тој расправи, да се светлост креће брже кроз густу средину него кроз ређу средину. Ферма је тврдио да тај постулат противуречи здравом разуму. Осим тога, Декарт се није слагао са дефиницијом тангенте коју је користио Ферма. Изјавио је да је Ферма неспособан као математичар и мислилац

Мерсен је известио Декарта 1638. г. да је Робрвал добио да је површина једног лука циклиде једнака тространој површини круга који описује циклоиду. Декарт је арогантно одговорио да није размишљао о том доста простом задатку, али да је резултат занимљив. Исте године Роберрвал обавештава Ферму о свом резултату. Ферма је већ био обавештен преко Мерсена и био је дао негативно мишљење о том резултату, међутим после добијеног писма од Робервала променио је претходно мишљење о том раду.

Нарорито су међусобно врло нетолерантни били Декарт, Ферма и Роберрвал. Роберрвал је цео живот био Декартов идејни противник. У научним расправама није се слагао ни са филозофским Декартовим поставкама. Највеће неслагање је било око филозофског појма „празнине“ (празног простора). Роберрвал сматра да простор и материјално тело су два различита појма а Декарт да је то једно те исто. Декарт је Робервала називао „духовним слепцем“, а Роберрвал да су Декартове поставке „празна бунцања“. Декартови биографи говоре да је Декарт изјављивао да му је од свих опонената (а било их је више) Роберрвал био најтежи. Роберрвал је имао неслагања и са Торичелијем, оспоравао је Торичелијев приоритет у израчунавању обима неких обртних тела.Торичели се није упуштао у полемику са њим. Био је убеђен у оригалност својих тврђења. Роберрвал је тврдио да је и Каваљери за своју методу недељивих користио његове идеје из млађих дана. Ферма није полемисао са Робервалом, напротив, веома је ценио његове резултате.

Године 1637. Ферма је послао Декарту свој рад „О максимуму и минимуму“. Пре тога Ферма је критиковао Декартову „Диоптрику“,а Декарт у „Геометрији“ приказује свој метод одређивања тангенте на неке алгебарске криве. У вези са тим, Декарт пише Мерсену да је Фермин рад уперен против тих његових резултата. Настају велике полемике и нетрпељивости између ова два генијална математичара Декарта и Ферме. Те полемике могу да се прате у њиховим међусобним препискама. Декарт је тврдио да Фермин метод одређивања тангенте није исправан и да води према лажним закључцима. Роберрвал и Паскал су били на страни Ферме. Ферма је те међусобне односе сматрао као „свој мали рата са Декартом“ а Декарт „мали процес математике против Ферме“ .

Ипак, ти међусобни спорови имали су велики значај за развој идеја диференцијалног рачуна. Лајбниц је говорио да се ниподаштавајући однос Декарта према својим опонентима осећа и у његовим научним делима и у његовим писмима другим математичарима.Унаточ све нетрпељивости према Робервалу и Ферми, Декарту је било важно њихово мишљење о сопственим резултатима. То се види из 39 Декартових писама нађених у Ферминој заоставштини. У Роберваловој архови су пронађена 74 Декартова писма.

На крају можемо са сигурношћу закључити да су Декарт, Ферма, Торичели и Робрвал, као и њихови поменути пртходници, учествовали у стварању инфинитезималног рачуна, те да су утрли широк пут синтези разних резултата инфинитезималног рачуна кога су дефинитивно уобличили генијални ствараоци Њутн и Лајбниц.

ИЗВОРИ

Математическая энциклопедия 1-5, у редакции И.М.Виноградова, Москва 1977.

Гугл, Википедија

Дирк Ј. Стројк , *Кратак преглед историје математике,* Математичка библиотека 51, Београд 1987.

В.А. Нинифорофский - Л.С.Фрейман, *Рождение новой математики,* Издательство „Наука“, Москва 1976.

Примљено у Редакцију 08.04.2014. Доступно онлине 14.04.2014.