MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXI (1)(2015), 5--10 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

Korisnije je riješiti jedan isti zadatak na nekoliko različitih načina nego riješiti nekoliko zadataka- svaki na samo jedan način. Ako se jedan isti zadatak riješi na razne načine, može se upoređivanjem rješenja utvrditi koje je od njih kraće, efektnije, elegantnije. Na taj način se stiče i izgrađuje vještina u rješavanju zadataka.

RAZLIČITE METODE ZA RJEŠAVANJE JEDNOG ZADATKA O TROUGLU [1]

(Different methods to solve a problem on the triangle)

Bratislav Sredojević [2] i Dragoljub Milošević [3]

Sažetak. U ovom radu je dato šest raznih rješenja jednog zadatka iz geometrije koji se odnosi na trougao.

Ključne riječi: jednakokraki trougao, slični trouglovi, Stjuartova teorema, Molvajdove formule, sinusna i kosinusna teorema, adicione formule za sinus.

Abstract. In this paper we give six different ways of one geometrical problem for the triangle.

Key words: isosceles triangle, similar triangles, Stewart' s theorem, Mollweid' s formulas, sine and cosine law, addition formulas for sine.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

---

[1] Ovaj članak smatramo poučnim i korisnim za mlađe matematičare- srednjoškolce i nastavnike koji rade sa nadarenim učenicima.

[2] Popovića put 19, 32300 Gornji Milanovac, Srbija
[3] NOU divizije 43, 32300 Gornji Milanovac, Srbija

U radu [1], na strani 54, dat je sljedeći zadatak (bez rješenja):
Ako u trouglu ΔABC *je* $\gamma = 3\alpha$ *, dokazati da tada vrijedi*

$$(c^2 - a^2)(c - a) = ab^2 . \qquad (*)$$

Ovdje ćemo prikazati šest načina rješavanja ovog zadatka.

Rješenje 1. Na stranici AB trougla ΔABC odredimo tačku D tako da je

$$\angle ACD = 2(\angle CAB) = 2\alpha \qquad (\text{Sl.1}).$$

Tada je $\angle CDB = 3\alpha$ (kao spoljašnji ugao za trougao ΔACD). Uvedimo sljedeće oznake: $\overline{AD} = x$ i $\overline{CD} = y$. Tada je $\overline{BD} = c - x$. Trouglovi ΔABC i ΔBCD su slični, pa je

$$\overline{BC} : \overline{BD} = \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AC} : \overline{CD}$$

ili

$$a : (c - x) = c : a = b : y .$$

Odavde lako dobijamo

$$x = \frac{c^2 - a^2}{c} \text{ i } y = \frac{ab}{c} . \qquad (1)$$

S obzirom da je $\angle ACD = 2(\angle CAD)$ u trouglu ΔADC, možemo koristiti sljedeću lemu (pomoćnu teoremu) (vidjeti [2]):

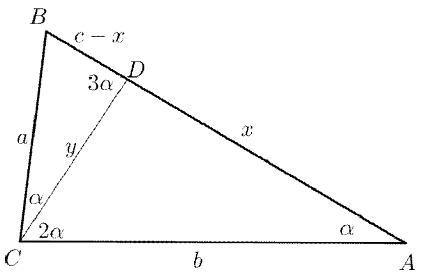
Lema. *Ako je u trouglu* ΔABC $\alpha = 2\beta$ *, onda je* $a^2 = b(b + c)$.

Primjenom ove leme na trougao ΔADC imamo

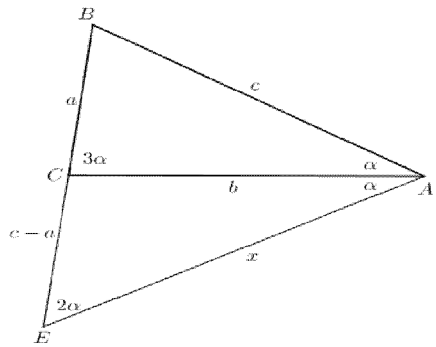
$$x^2 = y(y + b),$$

a odavde, zbog jednakosti (1), dobijamo

$$\begin{aligned}
\left(\frac{c^2 - a^2}{c}\right)^2 = \frac{ab}{c}\left(\frac{ab}{c} + b\right) &\Rightarrow (c^2 - a^2)^2 = ab(ab + bc) \\
&\Rightarrow (c^2 - a^2)(c - a)(c + a) = ab^2(a + c) / : (a + c) \\
&\Rightarrow (c^2 - a^2)(c - a) = ab^2, q.e.d.
\end{aligned}$$



Slika 1.



Slika 2.

Rješenje 2. Na pravoj $p(B,C)$ odredimo tačku E tako da $\angle EAC = \angle CAB = \alpha$ (sl. 2). Kako je $\angle BCA = \angle CEA + \angle EAC$ (spoljašnji ugao trougla ΔACE) ili $3\alpha = \angle CEA + \alpha$, tj. $\angle CEA = 2\alpha$, zaključujemo da je trougao ΔABE jednakokraki ($\angle EAB = \alpha + \alpha = 2\alpha = \angle CEA = \angle BEA$). Zbog toga je

$\overline{CE} = c - a$. Neka je $\overline{AE} = x$.

Na osnovu sinusne teoreme primjenjene na trougao ΔABE imamo

$$\frac{\overline{AE}}{\sin(180^\circ - 4\alpha)} = \frac{\overline{AB}}{\sin 2\alpha} \quad \text{ili} \quad \frac{x}{\sin 4\alpha} = \frac{c}{\sin 2\alpha}.$$

S obzirom da je $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha$, iz posljednje jednakosti slijedi

$$2\cos 2\alpha = \frac{x}{c}. \tag{2}$$

Kosinusna teorema primijenjena na trougao ΔACE daje

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 - 2\overline{AE}\cdot\overline{CE}\cdot\cos(\angle CEA)$$

ili

$$b^2 = x^2 + (c-a)^2 = 2x(c-a)\cos 2\alpha .$$

Iz posljednje jednakosti, zbog (2) proizlazi

$$b^2 = x^2 + (c-a)^2 - x(c-a)\cdot\frac{x}{c},$$

a odavde je

$$x^2 = \frac{c}{a}(b^2 - (c-a)^2). \tag{3}$$

Na osnovu pomenute leme (vidi prethodno rješenje!) primijenjene na trougao ΔACE je $b^2 = (c-a)(c-a+x)$ ili $b^2 - (c-a)^2 = x(c-a)$, tj.

$$x^2 = [\frac{b^2 - (c-a)^2}{c-a}]^2. \tag{4}$$

Iz jednakosti (3) i (4) slijedi

$$\frac{c}{a}[b^2-(c-a)^2]=[\frac{b^2-(c-a)^2}{c-a}]^2 \Rightarrow \frac{c}{a}(c-a)^2=b^2-(c-a)^2 \text{(zbog } c-a\neq b\text{)}$$

$$\Rightarrow c(c-a)^2=ab^2-a(c-a)$$

$$\Rightarrow (c-a)^2(c+a)=ab^2$$

$$\Rightarrow (c^2-a^2)(c-a)=ab^2, q.e.d.$$

Rješenje 3. Na stranici AB odredimo tačku F tako da $\angle FCA=\angle CAB=\alpha$ (sl.3) Tada je u trouglu ΔBCF : $\angle BCE=3\alpha-\alpha=2\alpha$ i $\angle CFB=2\alpha$ (kao spoljašnji ugao trougla ΔAFC). To znači da je trougao ΔBCF jednakokraki, pa je $\overline{BF}=\overline{BC}=a$. Zbog toga je $\overline{AF}=c-a$. Trougao ΔAFC je, takođe, jednakokraki, pa je $\overline{CF}=\overline{AF}=c-a$. Iz trougla ΔAFC je

$$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{2}\overline{AC}}{\overline{AF}}=\frac{b}{2(c-a)} \tag{5}$$

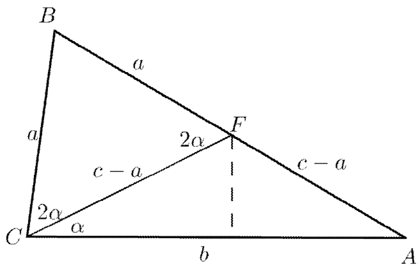
Na bazi kosinusne teoreme primijenjene na trougao ΔABC, imamo

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha. \tag{6}$$

Iz jednakosti (5) i (6) dobijamo

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\frac{b}{2(c-a)},$$

a odavde proizilazi tražena jednakost (*), tj. $(c-a)(c^2-a^2)=ab^2$.



Slika 3.

Rješenje 4. Primjenom Stjuartove[4] teoreme na ΔABC (sl. 3), imamo

[4] Matthew Stewart (1717-1785), škotski matematičar

$$\overline{AB}\cdot(\overline{AF}\cdot\overline{FB}+\overline{CF}^{2})=\overline{BC}^{2}\cdot\overline{AF}+\overline{AC}^{2}\cdot\overline{BF}$$

ili

$$c[(c-a)a+(c-a)^2]=a^2(c-a)+b^2a\,.$$

Nakon sređivanja posljednje jednakosti dobijamo

$$ac(c-a)+c(c-a)^2-a^2(c-a)=ab^2 \Rightarrow (c-a)[ac+c(c-a)-a^2]=ab^2$$
$$\Rightarrow (c-a)(c^2-a^2)=ab^2, q.e.d.$$

Rješenje 5. Kako je $\angle ABC=180^\circ-(\alpha+3\alpha)=180^\circ-4\alpha$ (sl. 3), primjenom Molvajdove[5] formule dobijamo

$$\frac{c-a}{b}=\frac{\sin\frac{3\alpha-\alpha}{2}}{\sin\frac{180^\circ-4\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{\cos(90^\circ-2\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha},$$

tj.

$$2\cos\alpha=\frac{b}{c-a}. \qquad (7)$$

Na osnovu jednakosti (6) i (7) imamo

$$a^2=b^2+c^2-bc\cdot\frac{b}{c-a},$$

a odavde, poslije sređivanja dobijamo traženu jednakost (*).

Rješenje 6. Na bazi sinusne teoreme imamo $a=2R\sin\alpha, b=2R\sin 4\alpha$ i $c=2R\sin 3\alpha$ (R- poluprečnik opisane kružnice oko trougla ΔABC), pa je

$$(c^2-a^2)(c-a)=ab^2 \Leftrightarrow (c-a)^2(c+a)=ab^2$$
$$\Leftrightarrow (\sin 3\alpha-\sin\alpha)^2(\sin 3\alpha+\sin\alpha)=\sin\alpha(\sin 4\alpha)^2 \quad (8)$$

Korišćenjem adicionih teorema za sinus zbira i razlike dva ugla

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \quad \text{i} \quad \sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

dobijamo

$$(\sin 3\alpha-\sin\alpha)^2(\sin 3\alpha+\sin\alpha)=(2\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha)^2\cdot 2\sin 2\alpha\cos\alpha$$

---

[5] Karl B. Mallweide (1774-1825), njemački matematičar i astronom

$$
\begin{aligned}
&= (2\sin 2\alpha \cos 2\alpha)\cdot 2(2\sin\alpha\cos\alpha)\cdot \cos 2\alpha \sin\alpha \\
&= \sin 4\alpha \cdot (2\sin 2\alpha \cos 2\alpha)\cdot \sin\alpha \\
&= \sin 4\alpha \cdot \sin 4\alpha \cdot \sin\alpha \\
&= (\sin 4\alpha)^2 \sin\alpha \ ,
\end{aligned}
$$

čime je potvrđena tačnost jednakosti (8), a samim tim i tražena jednakost (*).

LITERATURA

[1] J. Carstensen, A, Muminagić i P. Mladinić, *Pravokutni trokut*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2001.

[2] D. Milošević, *Razni dokazi jedne teoreme iz geometrije*, MAT-KOL (Banja Luka), XVII (1) (2011), 49-54.

Primljeno u redakciju 10.11.2013. Dostupno online 20.01.2014.