MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXI (3)(2015), 143-147 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm doiSrpska: 10.7251/MK1503143S

JOŠ ČETIRI RJEŠENJA JEDNOG ZADATKA O KVADRATU

(Yet four solutions of the problem on a square)

Aleksandar Sredojević i Dragoljub Milošević

Sažetak: U radu dajemo još četiri razna dokaza jednog zadatka o kvadratu.

Ključne riječi: kvadrat, stranica i dijagonale kvadrata, pravokutni trokut, Pitagorin i Stjuartov teorem, teorem o kosinusima, površina trokuta.

Abstract: In this paper we give new different solutions of one problem for the square.

Key words: square, side and diagonals of square, right – angled triangle, Pythagorean and Stewart's theorem, cosine law, area of triangle.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

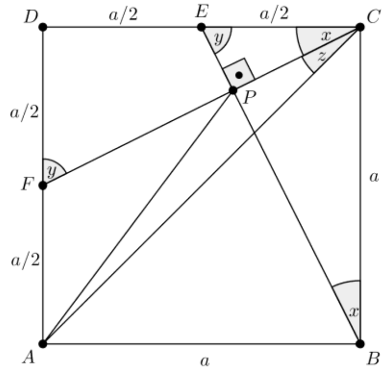
Posebnu pažnju zaslužuju zadaci koji mogu da se rješe na više načina,tj. zadaci čijem se rješavanju može pristupiti s različitih pozicija. Rješavanjem jednog istog zadatka na više načina stiče se i izgrađuje vještina u rješavanju zadataka, naročito problemskih. Upoređivanjem rješenja ustanovljavamo koje je od njih kraće, efektnije, elegantnije.

U [2] prikazana su dva rješenja sljedećeg zadatka:

Točke E i F su polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ kvadrata $ABCD$. Pravci BE i CF sijeku se u točki P. Dokaži da je $|AP| = |AB|$.

Prikazat ćemo još četiri njegova rješenja.

Prvo rješenje. S obzirom da su pravokutni trokuti BCE i CDF sukladni i da su šiljasti kutovi u svakom pravokutnom trokutu komplementni (tj. zbroj im je 90°), imamo:
$\angle EBC = \angle FCD = x, \angle CEB = \angle DFC = y$ i
$\angle PCE + \angle CEP = x + y = 90^\circ$.
Radi toga je u $\Delta CEP : \angle CPE = 90^\circ$, tj. dužina $\overline{CP}$ je visina pravokutnog trokuta BCE. Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutne trokute ABC i BCE dobivamo



Slika 1.

$$|AC| = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} \text{ i } |BE| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Ako kut $\angle ACF$ obilježimo sa z, imamo: $\angle ACD = x + z = 45^\circ$. Izrazimo površinu trokuta BCE na dva načina: $P_{\Delta BCE} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |CE|$ i $P_{\Delta BCE} = \frac{1}{2}|BE| \cdot |CP|$.

Odavde je $|BC| \cdot |CE| = |BE| \cdot |CP|$, ili

$$|CP| = \frac{|BC| \cdot |CE|}{|BE|} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Kako je $tg\ x = \frac{|CE|}{|BC|} = \frac{1}{2}$, $tg(x+z) = tg 45^\circ = 1$ i $tg(x+z) = \frac{tg\ x + tg\ z}{1 - tg\ x \cdot tg\ z}$,

imamo $1 = \frac{\frac{1}{2} + tg\ z}{1 - \frac{1}{2} tg\ z}$, pa je $tg\ z = \frac{1}{3}$. Radi $\cos^2 z - \sin^2 z = \frac{1 - tg^2 z}{1 + tg^2 z}$ i

$$\cos^2 z - \sin^2 z = \cos^2 z - (1 - \cos^2 z) = 2\cos^2 z - 1, \text{ dobivamo}$$

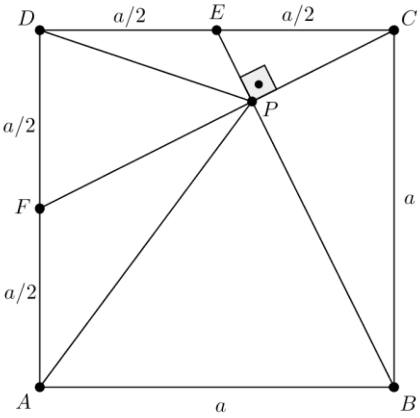
$2\cos^2 z - 1 = \frac{1 - tg^2 z}{1 + tg^2 z}$, ili $\cos^2 z = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1 - tg^2 z}{1 + tg^2 z}\right) == \frac{1}{1 + tg^2 z}$. Odavde, zbog $tg\ z = \frac{1}{3}$, slijedi $\cos^2 z = \frac{9}{10}$, odnosno $\cos z = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (jer je kut z šiljast).

Najzad, prema teoremu o kosinusima, iz ΔACP je:

$|AP|^2 = |AC|^2 + |CP|^2 - 2|AC|\cdot|CP|\cdot\cos z$, ili $|AP|^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2a\sqrt{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}$,

odnosno $|AP|^2 = a^2$, tj. $|AP| = a = |AB|$.

Drugo rješenje: Utvrđujemo da je $\angle CPE = 90^\circ, |BE| = |CF| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ i $|CP| = \frac{a}{\sqrt{5}}$ (kao u prvom rješenju, ili na drugi način). Sada je $|PF| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{\sqrt{5}}$. Iz ΔCPE imamo: $|PE| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2}$ (Pitagorin poučak!), tj. $|PE| = \frac{a}{2\sqrt{5}}$.



Slika 2.

Na osnovu Stewartovog teorema primjenjenog na trokut CDF je

$|CD|\cdot\left(|DE|\cdot|EC| + |PE|^2\right) = |DP|^2\cdot|CE| + |CP|^2\cdot|DE|$ ili

$a\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2\sqrt{5}}\right)^2\right) = |DP|^2\cdot\frac{a}{2} + \left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2\cdot\frac{a}{2}$. Otuda je $|DP|^2 = \frac{2a^2}{5}$.

Sada primjenom Stewartovog teorema na ΔAPD imamo:

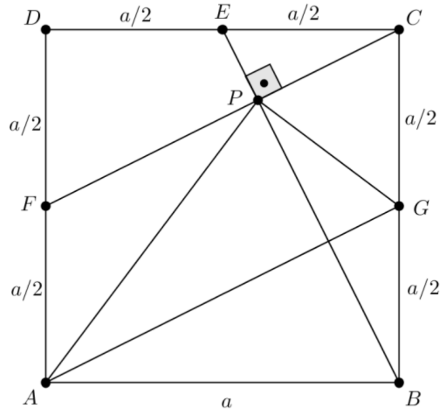
$|AD|\cdot\left(|AF|\cdot|FD| + |PF|^2\right) = |DP|^2\cdot|AF| + |AP|^2\cdot|DF|$, ili

$a\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2\right) = \frac{2a^2}{5}\cdot\frac{a}{2} + |AP|^2\cdot\frac{a}{2}$, odakle je $|AP|^2 = a^2$, tj. $|AP| = a = |AB|$.

Treće rješenje: Trokuti CFD i BEC su sukladni, pa je $\angle PEC = \angle PFD$. Četverokut $FPED$ je tetivni, što znači da je $\angle FPE = 90^\circ$. Također, i četverokut $ABPF$ je tetivni. Neka je točka G polovište stranice $\overline{BC}$. Na osnovu Pitagorinog poučka lahko dobivamo $|AG| = |EB| = |BF| = |CF| = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Trokuti CPE i BCE su slični (po KK), pa je

$|EB|:|BC|=|EC|:|CP|$. To, pak, znači da je $|CP|=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$. Četverokut $AGCF$ je paralelogram, jer ima jednake nasuprotne stranice. Radi toga je $\angle PCG=\angle AGB$. Kako je $|BG|=\dfrac{a}{2}$ i $|AG|=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, dobivamo

$$\cos(\angle PCG)=\cos(\angle AGB)=\frac{|BG|}{|AG|}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$



slika 3

Primjenom teorema o kosinusima na ΔGCP, imamo

$$|GP|^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2-2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$$, a odavde je $|GP|=\dfrac{a}{2}$.

S obzirom da je $AG\perp BP$ i $|BG|=|GP|=\dfrac{a}{2}$, zaključujemo da je četverokut $ABGP$ deltoid. To, pak, znači da je $|AP|=|AB|=a$.

Četvrto rješenje: Ustanovimo da je

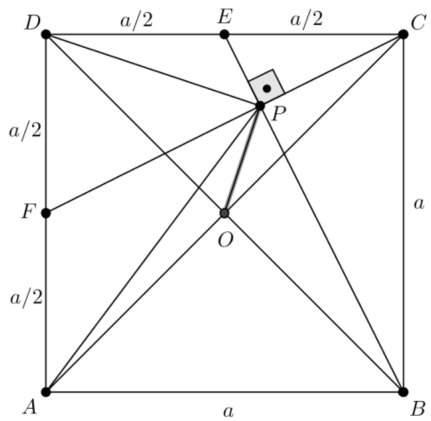
$$\angle CPE=90^\circ, |CP|=\frac{a}{\sqrt{5}}, |BE|=\frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$|PE|=\dfrac{a}{2\sqrt{5}}$ i $|DP|^2=\dfrac{2a^2}{5}$ (kao u prethodnim rješenjima, ili na drugačiji način).

Upotrijebit ćemo formulu za određivanje duljine težišnice t_a trokuta ABC koja glasi

$$t_a^{\ 2}=\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right).$$

Primjenom ove formule na određivanje duljine zajedničke težišnice $\overline{OP}$



slika 4

(O - točka presjeka dijagonala kvadrata), za trokute APC i BDP dobivamo:

$|OP|^2 = \dfrac{|AP|^2 + |CP|^2}{2} - \dfrac{|AC|^2}{4}$ i $|OP|^2 = \dfrac{|BP|^2 + |DP|^2}{2} - \dfrac{|BD|^2}{4}$. Odavde, radi $|AC| = |BD|$, slijedi $|AP|^2 + |CP|^2 = |BP|^2 + |DP|^2$, pa je

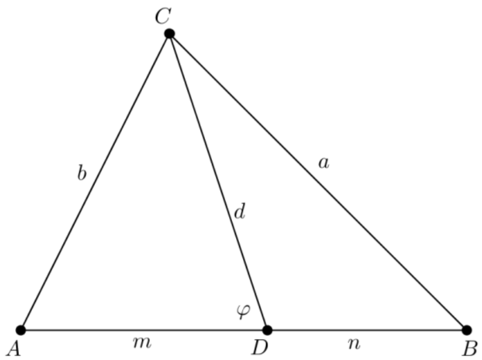
$|AP|^2 + \left(\dfrac{a}{\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2} - \dfrac{a}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \dfrac{2a^2}{5}$. Otuda je $|AP|^2 = a^2$, tj. $|AP| = a = |AB|$.

Sada dokažimo **Stewartov teorem** koji je korišten u drugom rješenju: *Ako je* D *točka na stranici* $\overline{AB}$ *trokuta* $ABC, |CD| = d, |AD| = m$ *i* $|BD| = n$*, tada vrijedi jednakost* $c \cdot (mn + d^2) = a^2 m + b^2 n.$ Neka je $\varphi = \angle ADC < 90^\circ$. Upotrijebit ćemo teorem o kosinusima. Iz trokuta ADC i BCD imamo:

$b^2 = m^2 + d^2 - 2md \cdot \cos\varphi$ i

$a^2 = n^2 + d^2 - 2nd \cdot \cos(180^\circ - \varphi)$.

Množenjem prve jednakosti sa n i druge sa m i zbrajanjem novodobivenih jednakosti, radi $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$, dobijemo traženu jednakost, čime je dokazan Stewartov teorem.



Slika 5

LITERATURA

[1] Arslanagić, Š. : *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo 2004.

[2] Lačević, H. i Orlić, P. *: Rješenje zadatka 3381*, MFL (Zagreb), LXIV – 3, (2013/2014), 196-197.