MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXI (3)(2015), 173-177 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm doiSrpska: 10.7251/MK1503173A

JOŠ JEDAN DOKAZ JEDNAKOSTI ZA UDALJENOST CENTRA UPISANE KRUŽNICE (*I*) OD ORTOCENTRA (*H*) TROUGLA

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

Sažetak. U ovom radu je dat još jedan dokaz jednakosti za udaljenost centra upisane kružnice (*I*) od ortocentra (*H*) trougla.

Ključne riječi: udaljenost, centar upisane kružnice i ortocentar trougla, kosinusna i sinusna teorema, težište trougla (*T*), Ojlerova teorema, Lajbnicova teorema.

Abstract. In this paper we give yet one proof of the equality for the distance of the incentre (*I*) from the orthocentre (*H*) of the triangle.

Key words: distance, incentre and orthocentre of triangle, cosine and sine law, centroid of triangle (*T*), theorem of Euler, theorem of Leibniz.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

Riječ je o sljedećoj jednakosti:

$$|IH|^2 = 2r^2 - 4R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma, \tag{1}$$

gdje su r i R radijusi upisane i opisane kružnice trougla ΔABC, a α,β,γ su njegovi unutrašnji uglovi. U [1], s. 437-439 je autor ovog rada dao jedan dokaz jednakosti (1) koji nije nimalo jednostavan. Daćemo sada još jedan dokaz ove jednakosti za koji ćemo koristiti sljedeće dvije jednakosti:

$$|IO|^2 = R^2 - 2Rr, \tag{2}$$

gdje je O centar opisane kružnice trougla ΔABC, te

$$|OH|^2 = 9r^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right), \tag{3}$$

gdje su a,b,c dužine stranica trougla ΔABC.

Recimo i to da se dva dokaza jednakosti (2) nalaze u [1], s. 432-434, a još jedan njen dokaz u [2], s. 79-80. Također, dva dokaza jednakosti (3) se nalaze u [1], s. 435-437.

Za dokaz jednakosti (1), koristićemo još jednu jednakost koja glasi:

$$|IT|^2 = \frac{2}{3}r^2 - \frac{4}{3}Rr + \frac{1}{18}\left(a^2+b^2+c^2\right), \qquad (4)$$

gdje je tačka T težište trougla.

Dokaz: Nacrtajmo odgovarajuću sliku. Koristićemo Lajbnicovu teoremu za trougao ΔABC (vidi [1], s. 354-355):

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = 3|MT|^2 + |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2, \qquad (5)$$

gdje je M proizvoljna tačka u ravni trougla. Stavljajući da je

$$|MA| = x,\ |MB| = y, |MC| = z,$$

zbog

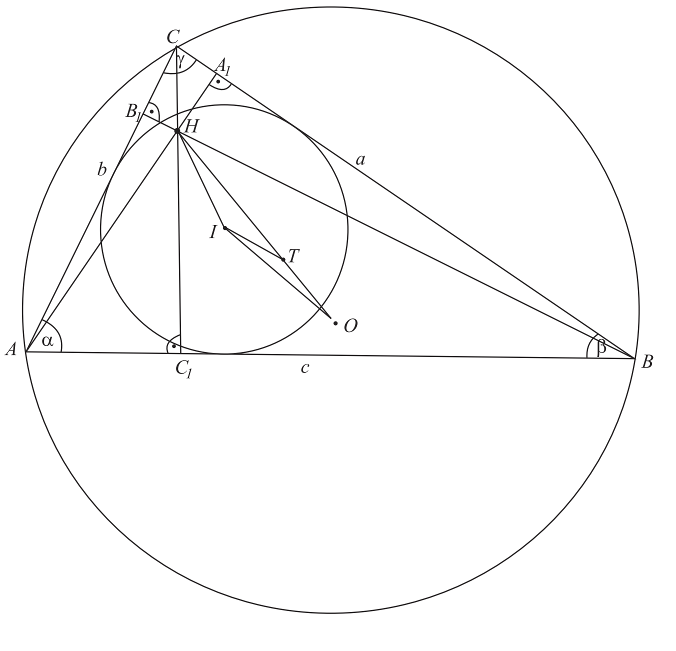
$$|AT| = \frac{2}{3}m_a,\ |BT| = \frac{2}{3}m_b,\ |CT| = \frac{2}{3}m_c,$$

tj.

$$|AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 = \frac{4}{9}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) = \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

dobijamo iz (5):

$$9|MT|^2 = 3\left(x^2+y^2+z^2\right) - \left(a^2+b^2+c^2\right).$$



Ako zamijenimo tačku M sa tačkom I, odavde dobijamo zbog

$$x^2 = (s-a)^2 + r^2,\ y^2 = (s-b)^2 + r^2,\ z^2 = (s-c)^2 + r^2;\ \left(s = \frac{1}{2}(a+b+c)\right):$$

$$9|IT|^2 = 3\left[(s-a)^2 + r^2 + (s-b)^2 + r^2 + (s-c)^2 + r^2\right] - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

$$\Rightarrow 9|IT|^2 = 3\left[\left(3s^2 + 2s(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2 + 3r^2\right)\right] - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

$$\Rightarrow 9|IT|^2 = 9r^2 - 3s^2 + 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right), \tag{6}$$

a odavde zbog $a^2 + b^2 + c^2 = 2s^2 - 2r^2 - 8Rr$, tj.

$$2s^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2r^2 + 8Rr$$

$$\Rightarrow s^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + r^2 + 4Rr. \tag{7}$$

Dobijamo sada iz (6) i (7):

$$9|IT|^2 = 9r^2 - \frac{3}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - 3r^2 - 12Rr + 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

$$\Rightarrow |IT|^2 = \frac{2}{3}r^2 - \frac{4}{3}Rr + \frac{1}{18}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

a ovo je (4).

Pređimo sada na dokaz jednakosti (1). Na osnovu kosinusne teoreme dobijamo iz trougla ΔTIO:

$$|IT|^2 = |IO|^2 + |OT|^2 - 2|IO| \cdot |OT| \cos\varphi, \tag{8}$$

gdje je $\varphi = \mathrm{R}IOT$.

Poznato je da su tačke O, T i H kolinearne i da se prava kojoj pripadaju te tačke zove **Ojlerova prava** te da važi **Ojlerova teorema**:

$$|OT| = \frac{1}{3}|OH|. \tag{9}$$

Sada slijedi iz (8) i (9):

$$\cos\varphi = \frac{|IO|^2 + |OT|^2 - |IT|^2}{2|IO| \cdot |OT|}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{|IO|^2 + \frac{1}{9}|OH|^2 - |IT|^2}{2|IO| \cdot \frac{1}{3}|OH|}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{9|IO|^2 + |OH|^2 - 9|IT|^2}{6|IO| \cdot |OH|}. \qquad (10)$$

Opet na osnovu kosinusne teoreme dobijamo iz trougla ΔIHO:

$$|IH|^2 = |IO|^2 + |OH|^2 - 2|IO| \cdot |OH| \cos\varphi,$$

a odavde zbog (10):

$$|IH|^2 = |IO|^2 + |OH|^2 - 2|IO| \cdot |OH| \cdot \frac{9|IO|^2 + |OH|^2 - 9|IT|^2}{6|IO| \cdot |OH|}$$

$$\Rightarrow |IH|^2 = |IO|^2 + |OH|^2 - 3|IO|^2 - \frac{1}{3}|OH|^2 + 3|IT|^2$$

$$\Rightarrow |IH|^2 = -2|IO|^2 + \frac{2}{3}|OH|^2 + 3|IT|^2. \qquad (11)$$

Sada na osnovu (2), (3) i (4) dobijamo iz (11):

$$|IH|^2 = -2R^2 + 4Rr + 6R^2 - \frac{2}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2r^2 - 4Rr + \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

$$\Rightarrow |IH|^2 = 4R^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

a odavde na osnovu sinusne teoreme:

$$\Rightarrow |IH|^2 = 4R^2 + 2r - \frac{1}{2} \cdot 4R^2\left(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma\right),$$

te zbog poznatog identiteta:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

najzad dobijamo:

$$|IH|^2 = 4R^2 + 2r^2 - 2R^2\left(2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right),$$

tj.

$$|IH|^2 = 2r^2 - 4R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

a ovo je jednakost (1) koju je trebalo dokazati.

Posljedica 1. Važi nejednakost (2.23 iz [3], s.25):

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \le \frac{1}{8}, \tag{12}$$

sa jednakošću ako i samo ako je treougao jednakostranični.

Pošto je $|IH|^2 \ge 0$, to dobijamo iz (1):

$$2r^2 - 4R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \ge 0$$

$$\Rightarrow \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \le \frac{r^2}{2R^2}. \tag{13}$$

Kako važi Ojlerova nejednakost $R \ge 2r$ (koja slijedi zbog (2), tj.

$|IO|^2 \ge 0 \Rightarrow R^2 - 2Rr \ge 0 \Rightarrow R \ge 2r$),

to je

$$\frac{r}{R} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{r^2}{R^2} \le \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{r^2}{2R^2} \le \frac{1}{8},$$

to slijedi da je nejednakost (13) bolja (jača) od nejednakosti (12). U (13) važi također jednakost ako je u pitanju jednakostranični trougao.

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
[2] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.
[3] O. Bottema, R.Z. Đorđević, R.R. Janić, D.S. Mitrinović, P.M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Gronningen (The Netherlands), 1969.